



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Propuesta metodológica de intervención didáctica para favorecer la visualización de la geometría

Autor/es

MARÍA SILVA PÉREZ

Director/es

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



Propuesta metodológica de intervención didáctica para favorecer la visualización de la geometría, de MARÍA SILVA PÉREZ
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

Trabajo de Fin de Máster

Propuesta metodológica de intervención didáctica para favorecer la visualización de la geometría

Autora

María Silva Pérez

Tutor: Juan Miguel Ribera Puchades

MÁSTER:

Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

AÑO ACADÉMICO: 2019/2020

"La función del arte.

Diego no conocía la mar. El padre, Santiago Kovadloff, lo llevó a descubrirla.

Viajaron al sur.

Ella, la mar, estaba más allá de los altos médanos, esperando.

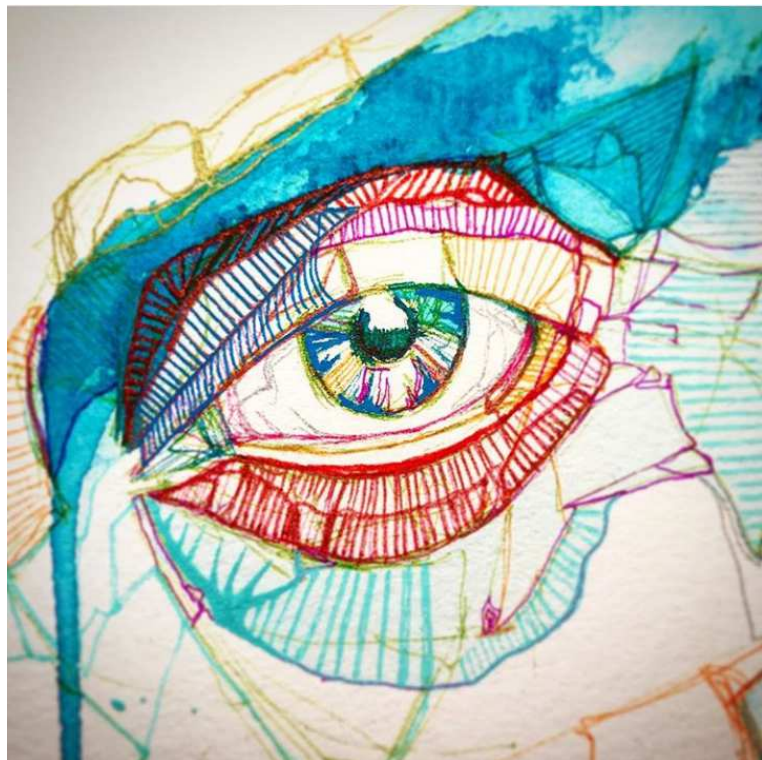
Cuando el niño y su padre alcanzaron por fin aquellas cumbres de arena, después de mucho caminar, la mar estalló ante sus ojos.

Y fue la inmensidad de la mar, y tanto su fulgor, que el niño quedó mudo de hermosura.

Y cuando por fin consiguió hablar, temblando, tartamudeando, pidió a su padre:

- ¡Ayúdame a mirar!".

(Eduardo Galeano. El libro de los abrazos)



Karmen Kraft, visual artist

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN

ABSTRACT

1. INTRODUCCIÓN	1
2. OBJETIVOS	5
3. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN	7
3.1. Aprendizaje y capacidad espacial	7
3.2. Geometría y visualización	14
3.3. Aspectos metodológicos de la propuesta	16
4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA	21
4.1. Introducción	21
4.2. Propuesta metodológica	21
4.2.1. Introducción	23
4.2.2. Currículo	24
4.2.3. Objetivos	24
4.2.4. Competencias	25
4.2.5. Contenidos	26
4.2.6. Estrategias de intervención	28
4.2.7. Metodología	28
4.2.8. Diseño de las actividades	30
4.2.9. Evaluación	34
4.2.10. Materiales y recursos	38
4.2.11. Atención a la diversidad	39
4.3. Aplicación de la propuesta metodológica	41
4.3.1. Introducción	41
4.3.2. Objetivos	42
4.3.3. Competencias	44
4.3.4. Contenidos	45
4.3.5. Estrategias de intervención	47
4.3.6. Metodología	48
4.3.7. Actividades	50
4.3.8. Evaluación de las actividades	52
4.3.9. Evaluación de la propuesta	52
4.3.10. Materiales y recursos	54
4.3.11. Atención a la diversidad	55
4.3.12. Interdisciplinariedad	56
5. DISCUSIÓN	57
6. CONCLUSIONES	63
7. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA	65

8. ANEXOS	75
8.1. Anexo I. Componentes del diseño curricular	75
8.2. Anexo II. Ficha de la propuesta metodológica. Diseño de actividades	75
8.3. Anexo III. Recursos didácticos	75

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Modelo de los tres estratos (Carroll, 1993)</i>	<i>9</i>
<i>Figura 2. Taxonometría de Bloom, (1956)</i>	<i>12</i>
<i>Figura 3. Modelo de creación de grupos cooperativos (Pere Pujolás)</i>	<i>30</i>

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Objetivos de etapa. Decreto 236/2015 (BOPV, 15-01-2016)</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 2. Contenidos curriculares Decreto 236/2015 (BOPV, 15-01-2016)</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 3. Temporalización. Estructura de las sesiones.....</i>	<i>33</i>
<i>Tabla 4. Criterios de evaluación e indicadores de logro (Decreto 236/2015)</i>	<i>34</i>
<i>Tabla 5. Objetivos de las actividades</i>	<i>43</i>
<i>Tabla 6. Competencias y fases de la actividad</i>	<i>44</i>
<i>Tabla 7. Diseño de los contenidos de las actividad en función de los contenidos curriculares..</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 8. Metodologías planteadas en cada actividad</i>	<i>49</i>
<i>Tabla 9. Secuenciación de las actividades. Fases</i>	<i>51</i>

RESUMEN

El presente trabajo se centra en el estudio de una propuesta de modelo de intervención educativa, de mejora de la capacidad espacial a través de la geometría, en base al análisis de investigaciones relevantes sobre el tema.

Si una de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de la capacidad intelectual de los adolescentes, se plantea potenciar el razonamiento espacial desde la geometría, como competencia esencial para entender e interpretar el mundo que nos rodea, y poder adaptarnos y transformarlo con creatividad.

El trabajo pretende aportar al ámbito educativo, un modelo de intervención didáctica en el aula de matemáticas genérico, que fomente el desarrollo de la capacidad espacial del alumnado desde un enfoque constructivista que aproveche los valores espaciales de la geometría para la formación de su identidad como personas.

Se concreta en una aplicación práctica de la metodología didáctica, mediante la resolución de actividades creativas y se sugieren distintos recursos didácticos que posibilitan el fortalecimiento de las habilidades espaciales a partir del entorno y que posibilita un aprendizaje significativo de la geometría de manera cooperativa.

Palabras clave: capacidad espacial, habilidades espaciales, visualización, geometría, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estrategias formativas, propuesta metodológica, recursos para la geometría.

ABSTRACT

The present work focuses on the study of a proposal for an educational intervention model to improve spatial capacity through geometry, based on the analysis of relevant research on the subject.

If one of the purposes of teaching mathematics is the development of the intellectual capacity of adolescents, it is proposed to enhance spatial reasoning from geometry, as an essential competence to understand and interpret the world around us, and to be able to adapt and transform it with creativity.

The work aims to contribute to the educational field, a generic didactic intervention model, which fosters the development of the spatial capacity of the students from a constructivist approach that takes advantage of the spatial values of geometry to form their identity as people.

It is specified in a practical application of the didactic methodology, through the resolution of creative activities. Different didactic resources are suggested to allow the strengthening of spatial skills based on the surrounding reality that enables a meaningful learning of geometry in a cooperative way.

Key words: spatial ability, spatial abilities, visualization, geometry, teaching and learning mathematics, teaching strategy, methodological proposal, resources for geometry.

1. INTRODUCCIÓN

La geometría es la rama de las matemáticas más relacionada con mi profesión como arquitecta, y por tanto es desde mi experiencia personal donde como docente considero que podría aportar valor al ámbito educativo, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mediante la aportación de dosis de creatividad en el diseño de actividades atractivas, motivadoras para desde la visualización, desarrollar en el alumnado la capacidad espacial, que considero necesaria para la comprensión de los conceptos abstractos matemáticos.

Esta idea se ha visto reforzada en el periodo de prácticas, en el que se han detectado algunas dificultades en parte del alumnado, en la comprensión e interpretación de información visual, representaciones y gráficas en matemáticas, así como en otras materias como dibujo técnico y tecnologías de la información. Esta falta de desarrollo del pensamiento espacial repercute en la asimilación de conceptos matemáticos abstractos, en la que puede ayudar significativamente la visualización para poder ser asimilados.

Se evidencia además, que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se deja poco hueco a la improvisación, con la práctica repetida de ejercicios con planteamientos cerrados y definidos, dirigidos en la búsqueda de la solución numérica correcta.

El motivo de esta situación puede ser consecuencia del mero seguimiento del libro de texto tradicional, no incluyendo en sus intervenciones materiales visuales y motivadores que estimulen y fomenten dichas capacidades espaciales, que no permiten que el alumnado conecte los contenidos con sus experiencias vitales, y por lo tanto, no asimilen la importancia de su aprendizaje para que les resuelvan los problemas diarios, es decir, no ven la utilidad de los conceptos teóricos.

Resulta por tanto muy conveniente la estimulación de la capacidad espacial, con técnicas específicas para el desarrollo de habilidades espaciales desde la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos conectados con la realidad, con estrategias concretas, de motivación, visualización y de comunicación, para obtener respuestas creativas.

Para el desarrollo del trabajo se ha llevado a cabo un estudio acerca de la capacidad espacial y las habilidades que engloba, así como su importancia en

la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y concretamente de la geometría. Nos ayuda a comprender el mundo que nos rodea, manejar conceptos y relaciones geométricas, comprender el plano y el espacio. No es una habilidad innata que se adquiere de forma espontánea, sino que es posible moldearla como parte del aprendizaje de las matemáticas. Los conceptos, teorías y términos matemáticos han surgido de la vida, concretamente la geometría representa el espacio, crea imágenes que comunican relaciones espaciales, y por lo tanto conecta con la realidad diaria del alumnado.

Es por esto que resulta fundamental desarrollar dicha capacidad en el aula de matemáticas, en los contenidos curriculares de geometría, mediante dispositivos adecuados y eficaces, a partir de la percepción visual de la geometría que nos rodea, para provocar la asimilación e interiorización de los conocimientos matemáticos.

En el proceso de aprendizaje interviene la persona de manera íntegra, con sus capacidades, emociones, sentimientos, motivaciones y habilidades. Por tanto, se entiende el aprendizaje como un proceso que implica cambios en el individuo a través de la experiencia. Esa interacción continua entre contexto y persona es la que facilita las transformaciones. En consecuencia, el estudiante es quien aprende mediante su experiencia personal, y la traduce de manera significativa en términos de comportamiento. El proyecto OECD/PISA afirma:

La cultura matemática de una persona está determinada por las habilidades de esta para tratar el mundo real, identificando, entendiendo, comprometiéndose y juzgando con fundamento el papel que las matemáticas pueden jugar según las necesidades de las personas en su vida actual y futura como ciudadanos constructivos, responsables y reflexivos (OECD/PISA, 2005).

Conocidas además las capacidades cognitivas del cerebro adolescente, con la evidencia de los estudios neurológicos que estiman cómo en el hemisferio cerebral derecho se integra la percepción espacial y que tiene a su cargo el pensamiento emocional, creativo y artístico, se pueden desarrollar métodos educativos que den respuesta a las dificultades indicadas.

Por lo tanto, con el fin de hacer frente a las dificultades anteriormente descritas, se propone una propuesta de intervención didáctica, que influya positivamente en el desarrollo de las y los adolescentes, que trata de

incorporar los beneficios de las habilidades espaciales y creativas a la enseñanza de la geometría, tal y como se justificará más adelante.

El trabajo pretende proponer unas pautas metodológicas, unos ejes de orientación, que permitan a los docentes establecer un marco de referencia abierto y ágil para realizar su labor dentro del aula.

La propuesta metodológica se plantea como una estrategia docente, que consiste en el empleo de la visualización de imágenes reales de distintos ámbitos, como herramienta didáctica, para trabajar los contenidos curriculares de la geometría, mediante metodologías activas de aprendizaje cooperativo.

En los apartados siguientes se describe el marco teórico empleado, a partir del cual se determina y desarrolla la propuesta didáctica, respondiendo igualmente a los objetivos fijados, para acabar con la aplicación práctica que trata de concretarla en un contexto determinado.

Para finalizar el trabajo se añadirán las reflexiones de la discusión, las conclusiones y la bibliografía consultada, así como los anexos correspondientes.

2. OBJETIVOS

Del interés específico en el desarrollo de la capacidad espacial en el alumnado de secundaria, surge este trabajo, mediante el cual se propone aportar un modelo de intervención didáctica, para que los estudiantes a través de la geometría del entorno, desarrollen su pensamiento creativo y configuren su identidad, y dispongan de herramientas para responder ante la incertidumbre.

El objetivo principal de este Trabajo Final de Máster es elaborar una propuesta metodológica para diseñar intervenciones de aula que a partir de la visualización y mediante el análisis crítico de imágenes reales, favorezcan la comprensión de los contenidos matemáticos.

Otros objetivos específicos del trabajo son:

- Que la geometría no se limite a la memorización y aplicación de fórmulas.
- Que los estudiantes descubran las propiedades y las transformaciones de la geometría en el entorno.
- Elaborar actividades desde estrategias de uso de la visualización, con recursos atractivos.
- Mejorar las habilidades de razonamiento espacial y los procesos de aprendizaje, para la resolución de problemas y actividades de forma creativa e innovadora.
- Ofrecer a otros docentes de un método genérico como recurso didáctico, para contextualizarlo al ámbito de intervención.

Estos objetivos específicos tienen relación con conceptos generales de la enseñanza que están presente en todo momento en el diseño de la propuesta, como son:

- Fomentar la creatividad para contribuir al desarrollo del ser humano y desarrollar la resiliencia en la vida cotidiana, ante las incertidumbres de la vida.
- Desarrollar el razonamiento divergente caracterizado por una gran variedad de soluciones alternativas, como ingrediente importante de la creatividad.

El resultado de la revisión bibliográfica se expone en el siguiente apartado, con la intención de que sirva de base para la propuesta metodológica objeto del trabajo, debidamente fundamentada, que facilite a otros docentes el diseño de las intervenciones didácticas que garanticen mejores resultados en el aula.

3. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

A continuación se organiza el marco teórico y el estado de la cuestión, exponiendo de forma argumentada los distintos enfoques teóricos acerca de las consideraciones sobre la capacidad espacial y su conexión con la geometría, en los que se fundamenta la propuesta objeto del trabajo fin de máster.

Se ha desarrollado un análisis y reflexión crítica de artículos científicos, siguiendo criterios de búsqueda de todos los conceptos y parámetros que inciden en la capacidad espacial relacionados con la enseñanza de la geometría. Así como se han consultado revistas y publicaciones periódicas de educación, ponencias de congresos sobre innovación docente, para conocer las estrategias y metodologías, recursos educativos, resultados de actividades, que favorecen el desarrollo de las habilidades espaciales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

3.1. Aprendizaje y capacidad espacial

Según sugiere la investigación llevada a cabo por el Centro de desarrollo de Altas Capacidades de Chicago (GDC), existen dos estilos de aprendizaje, provocados por la forma de procesar la información:

1. Aprendizaje auditivo-secuencial: aquel que prioriza el hemisferio izquierdo tienden a ser verbales, secuenciales, analíticos y con buena orientación temporal.
2. Aprendizaje viso- espacial: aquel que prioriza su hemisferio derecho tienden a ser visuales, perceptivos, sintetizadores y con buena orientación espacial.

En el ámbito educativo, los modelos de enseñanza y aprendizaje tradicional de la geometría se basan en la memorización de conceptos y su aplicación, que cada estudiante asimila en función de sus propias capacidades (Barrantes, 2002). Así, para algunos estudiantes auditivo-secuenciales, que piensan con palabras, visualizar los conceptos matemáticos puede resultarles complicado, ya que su razonamiento visual no es tan desarrollado y por tanto, pueden presentar dificultades en matemáticas, física o dibujo.

Los resultados de muchas investigaciones en las que se han realizado pruebas de evaluación de ítems sobre habilidades espaciales, muestran que

algunos estudiantes tienen dificultades para visualizar los objetos globalmente, coordinar las visiones parciales de los objetos, para evocar la visión desde distintos puntos de vista y para verificar la corrección de sus creaciones y conceptualizar los principios de representación.

De hecho, según evidencian los resultados de los informes Pisa en España, el bloque de Geometría es el que obtiene los resultados más bajos, y radican en la percepción visual y la manera de construir los conceptos geométricos.

Son muchos los autores que consideran la capacidad espacial en su acepción más global, y la definen como la cualidad que tiene una persona para las representaciones espaciales (Lean y Clements, 1981; Clements, 1989; Connor y Serbin, 1985), que McGee (1979) especifica como la capacidad de formar imágenes mentales y poder manipularlas en el pensamiento.

Los enfoques sobre las teorías acerca de la capacidad espacial son diversos, y no existe una base teórica de referencia en cuanto a los conceptos que maneja (Arrieta, 2003), a la que se le atribuye una vital importancia para el desarrollo intelectual del individuo, en su capacidad de representar, generar, recordar y transformar información simbólica no lingüística (Linn & Petersen, 1985).

Además, existe una limitada investigación empírica sobre la aplicación al aula, ya que el enfoque espacial no siempre encuentra un marco educativo y curricular en materias STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), entre las que se engloban las matemáticas y la tecnología (Koolvoord, 2012).

Tal y como concluyen los resultados de las investigaciones de Arrieta (2003), la capacidad espacial va aumentando progresivamente a lo largo de los años de escolaridad, resultado de su medición mediante el modelo de los tres estratos de Carroll (1993) sin ninguna intervención específica.

Carroll's three-stratum model of intelligence

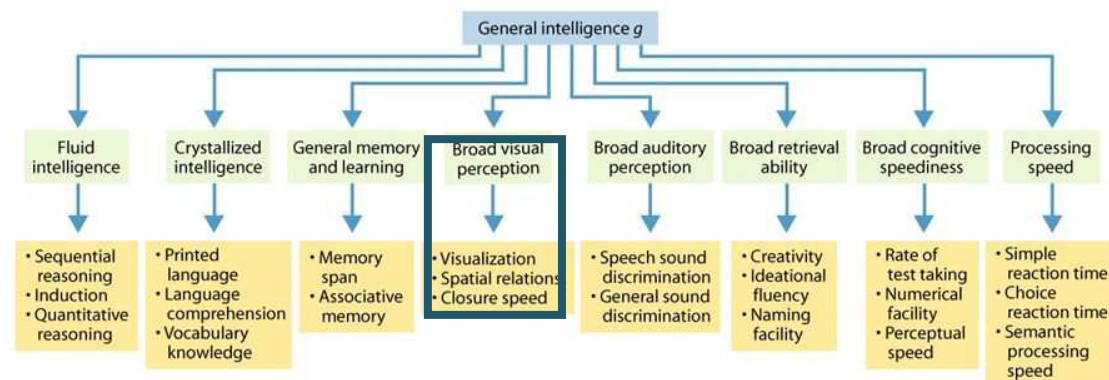


Figura 1. Modelo de los tres estratos (Carroll, 1993). Fuente: SlidePlayer

Se establecen en él tres componentes de la capacidad espacial que agrupan la mayoría de autores:

- **Visualización:** Habilidad de generar la imagen mental, transformarla y almacenar los cambios producidos, y que Guilford (1967) la denomina como el conocimiento de transformar figuras o cuerpos representados en el plano.
- **Percepción espacial:** capacidad de ubicar, orientarse, hallar referencias y relaciones.
- **Rotación mental:** según definen Shepard y Cooper (1986) y Shepard y Metzler (1971) es la capacidad de rotar mentalmente objetos bidimensionales o tridimensionales en bloque.

Estos componentes se pueden medir para evaluar la capacidad espacial en los estudiantes, mediante tests psicométricos, con pruebas de orientación, visualización (Friedman, 1995), de competencia imaginativa (Rapetti y Difabio, 2003), Purdue Spatial Visualizations Test/Visualizations of Rotations (PSVT/TR) (Bodner y Guay, 1997), cuestionario MSLQ (Motivated Strategies for Learning Questionnaire, Pintrich y De Groot, 1990).

A su vez, diferentes autores se han referido a la capacidad espacial con diferentes acepciones, como inteligencia espacial, pensamiento espacial, habilidad viso- espacial, visión espacial, imaginación visual, orientación

espacial, etc. que en didáctica de las matemáticas se determinan como visualización, o visualización espacial.

Es a partir de los años cincuenta cuando se relaciona la capacidad espacial con la capacidad matemática, fruto de la demostración de pruebas espaciales que la relacionaban directamente con la geometría (Murray, 1949, Barakat, 1951 y Wrigley, 1958, citados por Arrieta, 2003). Así, el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento creativo en todos los niveles de matemáticas (Lean y Clements, 1981), y se utiliza para representar y manipular la información en el aprendizaje y en la resolución de problemas (Clements y Battista, 1992).

La importancia de la capacidad de visualización espacial en la educación matemática viene refrendada por numerosas investigaciones a lo largo de los últimos años, entre los que destacan las revisiones de Bishop (1989), Clements y Battista (1992) y Gutiérrez (1998).

El ámbito educativo a partir de los años ochenta, recoge la importancia de la capacidad espacial en las matemáticas, y lo incluye junto al razonamiento abstracto, verbal y la aptitud numérica, proponiendo una geometría más intuitiva y práctica.

Al mismo tiempo, se confirma que las habilidades requieren aprendizaje y entrenamiento para que los estudiantes adquieran su competencia (Gutiérrez, 2010), es decir, sean capaces de movilizar diversos recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones (Perrenoud, 2004), englobando igualmente en ellas las habilidades espaciales, según han demostrado Uttal y otros (2013), como fundamentales para el rendimiento académico y profesional de dicha disciplinas.

Prueba de ello son las investigaciones que argumentan que el alumnado que ejercita habitualmente tareas de habilidades espaciales, mejora sus capacidades de observación, atención, valora las cualidades estéticas, transforma o modifica con mayor facilidad su entorno y mejora múltiples capacidades o competencias, además de la espacial.

De hecho, en los últimos años se atiende más a dichas capacidades espaciales, ya que diversas investigaciones han demostrado que el disponerlas es garantía de un buen rendimiento académico (Vázquez y Noriega 2010). En ellas determinan cómo la competencia espacial, potenciada por el perfil

motivacional, son factores que garantizan un rendimiento satisfactorio, donde inciden directamente las variables emocionales, la valoración de la actividad y las habilidades para llevarla a cabo, que son determinantes del estilo de aprendizaje de los estudiantes.

El desarrollo de las habilidades viene determinado por el desarrollo bio-psicológico de los y las adolescentes, según afirma Sperry (1951, 1963, citado en Ruíz), ya que las redes neuronales se establecen durante el desarrollo. En esta etapa se produce una poda sináptica, pero sin embargo, se hace más eficaz y eficiente (Spears, 2010; Feinstein, 2009), y el flujo de la información aumenta por la mielinización, proceso que depende de la experiencia.

Se sabe que en la adolescencia se produce un cambio estructural del cerebro, en el que interviene el entorno, lo biológico, y lo social, por lo que, según indica Goldberg (2002), puede ocurrir que dicho retraso sea consecuencia de las acciones educativas.

Las investigaciones del cerebro adolescente, a su vez, han proporcionado conocer que se puede rediseñar en cierto modo su cerebro, y es ahí cuando se puede influir desde la educación, con propuestas didácticas que aporten esas experiencias. Ya que según afirma Marina (2010), la educación, como resultado final, transforma la inteligencia biológica en talento humano, y “el aprendizaje cambia la estructura del cerebro porque altera la expresión genética” Eric Jensen (2006).

Así, es en la inteligencia donde se ven implicados diversos procesos cognitivos como son la creatividad, la memoria visual, el razonamiento espacial, la capacidad de abstracción y la orientación espacial.

Para Piaget la inteligencia es la solución de un problema nuevo para el sujeto que requiere una coordinación de medios para alcanzar un cierto objetivo que no es accesible de manera inmediata. Estudió el desarrollo de las funciones cognitivas que proporcionan un conocimiento del mundo exterior, y presentó el concepto de niveles de aprendizaje desde un punto de vista genético. Describió el desarrollo del individuo a través de cuatro niveles, dentro de los cuales el nivel de secundaria que aquí nos ocupa coincide con el de operaciones concretas (a partir de 11 años de edad).

A su vez, de la taxonomía de Bloom (1956) se derivan las fases por las que pasa el pensamiento, que son las que se necesitan transcurrir para

comprender y asimilar los conceptos matemáticos: reconocer, identificar – asimilar – comprobar – crear.

Bloom's Taxonomy

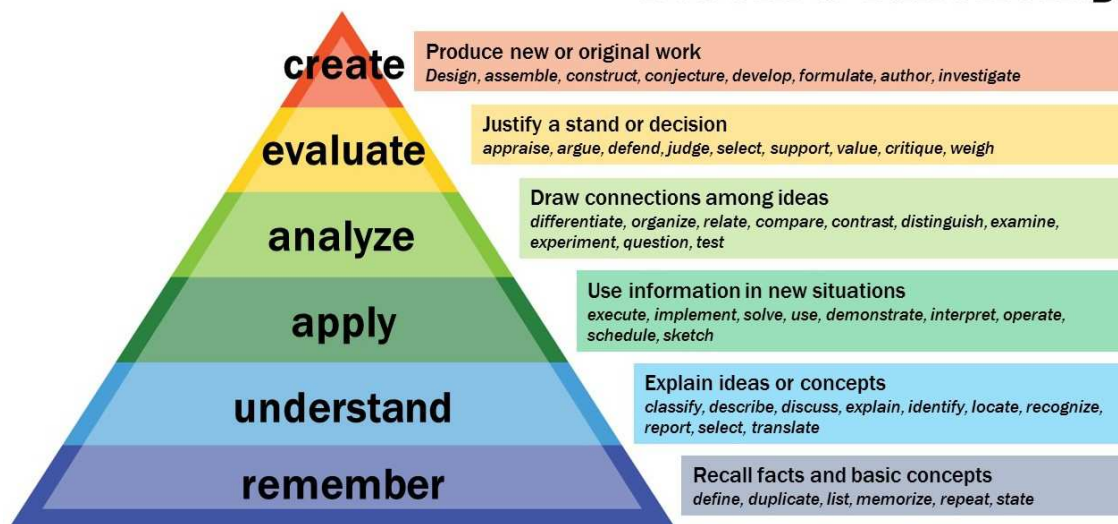


Figura 2. Taxonometría de Bloom, 1956.

Concretamente en matemáticas, Bishop (1981) considera como necesarios dos modos de pensamiento, diferentes pero complementarios: el pensamiento creativo, basado en la intuición, y el analítico, basado en la lógica. Polya (1962) a su vez, considera fundamentales en el conocimiento matemático la información, y “saber cómo”, definiendo este último como la habilidad para resolver problemas que requieren juicio crítico y creatividad, que Eric Mann (2006) la apunta como esencia de las matemáticas. Ginsburg (1996) afirma en esa misma línea, que la esencia de las matemáticas es pensar creativamente, no únicamente llegar al resultado correcto. Y Haylock (1987, citado en Mann) añade, que la resolución de problemas matemáticos e identificar su significado, favorece el razonamiento creativo, y por tanto concluye que una adecuada enseñanza de la matemática favorecerá su desarrollo.

Respecto a la geometría en particular, uno de los modelos de enseñanza y aprendizaje de la geometría es el modelo de razonamiento de Van Hiele (1957), que establece cinco niveles en los que se produce la evolución del razonamiento geométrico, de manera secuencial: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor. Así, en los primeros cursos de secundaria su nivel de razonamiento sólo les permite comprender algunas

demostraciones deductivas, y los estudiantes construyen el conocimiento a partir de ejemplos concretos, sin analizarlos matemáticamente.

Tal y como consideran Braga (1991) y De la Torre (2003), la teoría de Piaget (de desarrollo) y el modelo de Van Hiele (de aprendizaje) coinciden en que el desarrollo de los conceptos geométricos responden a una secuencia, desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento más deductivas y abstractas.

De ahí que la labor docente consista en facilitar dicha evolución del razonamiento, y por tanto dicho Modelo de Van Hiele pueda ser un marco de referencia en el que se puedan basar las estrategias que Goncalves (2006) solicita a los docentes, como necesarias para el desarrollo del razonamiento intelectual de los estudiantes, ya que proporciona pautas para organizar los contenidos curriculares educativos, favoreciendo el avance del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes, a medida que van superando cada nivel para avanzar al siguiente.

Este modelo también da importancia al lenguaje para el paso de un nivel a otro, es decir, a la manera de expresarse a la hora de resolver un problema, y en el significado que se le da a un determinado vocabulario matemático, tal y como también se refleja en los criterios de evaluación e indicadores de logro del currículo normativo. Por eso coincido con Vargas (2013) en la necesidad de dar a los estudiantes la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas, de tal forma que les permita aprender y mejorar sus competencias lingüísticas.

Recientes investigaciones sobre las tendencias de enseñanza y aprendizaje de la geometría, la consideran apropiada para interpretar y actuar sobre el espacio, y todos coinciden en su función instrumental en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, a fin de comprender y modificar el entorno (Alsina et al., 1988; Fernández et al., 1999; Calvo, 1996). Y aportan diversas estrategias y recursos didácticos tanto en geometría plana como espacial, con la pretensión de que favorezcan su aprendizaje y que garanticen mejores resultados en el rendimiento de los estudiantes de secundaria.

Entre ellas cabe resaltar la relación que hace Gascón (2002) entre la geometría sintética y analítica, que combina las técnicas sintéticas con las analíticas, demostrando su complementariedad, e indicando la existencia de la limitación de los temas en secundaria, y las consecuencias didácticas que ello

provoca. Prada (2003) establece un marco metodológico para la enseñanza de la geometría, diseñado mediante materiales diversificados para atender a la diversidad que, siguiendo los niveles de Van Hiele, que permiten llegar al razonamiento. Ibáñez (2001) incluye la demostración en geometría como medio de descubrimiento, y apunta el potencial que tienen los contenidos geométricos para explicar otras áreas matemáticas como la probabilidad. Así como el trabajo práctico de Real (2004) con su propuesta didáctica de las cónicas, verificando en ellas propiedades que se utilizan en la vida cotidiana.

Dado que el mundo se representa mediante figuras e imágenes, éstas constituyen experiencias vitales para los estudiantes, por lo que la utilización de la imagen como recurso didáctico tiene muchas ventajas, en cuanto facilitan la visualización espacial geométrica, transmitiendo un conocimiento estable y utilizable (Moles, 1991).

Si se logra la mejora de la capacidad espacial, se accederá al concepto viéndolo directamente, esto es, comprendiéndolo de forma inmediata, ya que tal y como asegura Ron Davis el pensamiento no- verbal puede llegar a ser miles de veces más rápido que la conceptualización verbal.

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría, las imágenes juegan un papel muy importante, y por tanto enseñar geometría mediante la visualización de imágenes supone una mayor garantía en el logro de un satisfactorio rendimiento académico de los estudiantes, ya que como apuntan Gutiérrez y Jaime (1996), los ejemplos de imágenes impactan más en los estudiantes y producen un efecto mental más duradero y profundo.

Resulta entonces necesario incluir actividades en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se visualicen (imágenes visuales reales), se interpreten, se manipulen y se creen. De esta manera, el esquema conceptual se construirá a partir de situaciones variadas de la experiencia del alumnado, y sin necesidad de recurrir únicamente a la definición de los conceptos matemáticos. (Barrantes y Zapata, 2008).

3.2. Geometría y visualización

En este apartado se hará referencia a la importancia de la capacidad espacial en la didáctica de las matemáticas, es decir, cómo puede contribuir a la comprensión de los contenidos de la geometría. A la vez que ésta

recíprocamente favorece y desarrolla la percepción visual, además de otras capacidades como el razonamiento lógico y la expresión verbal.

Rudolf Arnheim (1985) estudió la influencia de la percepción visual en la formación de los conceptos, determinando los diferentes mecanismos psicológicos por los que se percibe la información espacial, considerando la percepción visual como un factor de conocimiento necesario para interpretar el espacio y sus elementos, y estableció su funcionamiento como actividad cognitiva. El ser humano, por tanto, a través de la percepción del espacio que le rodea y la necesidad de transformarlo y crear nuevas situaciones, ha buscado en la geometría una manera de explicar aquello que percibe a través de los sentidos.

Como se ha indicado anteriormente, la capacidad espacial se determina en didáctica de las matemáticas como visualización, así que será a través de ella donde se plantea trabajar los contenidos geométricos curriculares de secundaria, puesto que tal y como confirman las investigaciones analizadas, existe una correlación significativa entre el desempeño de la visualización espacial, como habilidad cognitiva, y las matemáticas.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) describe la geometría como la materia mediante la que se estudian las formas y estructuras geométricas, y se analizan sus características y relaciones. A la vez señala la visualización espacial como un aspecto importante del pensamiento geométrico, mencionando cómo la construcción de modelos geométricos y razonamiento espacial permiten la descripción del entorno, incluyendo así la geometría como una herramienta de resolución de problemas.

La geometría, entonces, como lenguaje a través del cual entendemos nuestra realidad, ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información percibida a través de los sentidos, permitiendo así el desarrollo de destrezas espaciales (Andonegui, 2006). Por tanto, es ahí donde radica su importancia, ya que además de otras habilidades del pensamiento, el estudio de la geometría nos permite conectar al alumnado con su entorno, favoreciendo así la mejora espacial del mismo, e integrando la visualización con la conceptualización matemática.

Fernández, Cajaraville y Godino (2012) trazan la visualización espacial como los procesos y capacidades que tenemos los individuos para realizar

determinadas tareas que exigen “ver” o “imaginar” los objetos geométricos espaciales, así como relacionar objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

Supone por tanto la comprensión de un concepto a través de una imagen visual, y no se entiende como el simple hecho de ver, sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar la información visual en el pensamiento y en el lenguaje del individuo (Cantoral y Montiel, 2015).

Según afirman Vinner y Hershkowich (1983), la identificación o construcción de ejemplos de un concepto supone que hay que tener en cuenta, la imagen del concepto (mental) y la definición del concepto (verbal), conjuntamente con las operaciones mentales o físicas. Así, la estructura cognitiva asociada al concepto matemático está formada por la imagen mental fruto de la experiencia, en la que se interiorizan las propiedades y procedimientos del concepto, y que es lo que Vinner (1991) denomina esquema conceptual. De su definición Vinner (1991) deduce que las representaciones gráficas o geométricas no sólo son esenciales para el estudio de los contenidos propios de geometría, sino también en las otras áreas de las matemáticas como el análisis matemático, el álgebra o los métodos numéricos, ya que permiten visualizar el contenido abstracto y formal de las ideas y conceptos involucrados. Balacheff (Montoya, 2006) indica como esencial la forma de representar los conceptos para la asimilación e interiorización de los mismos, afirmando que dependerá de si se construye a partir de una imagen mental o de un cálculo simbólico.

La actividad geométrica implica por tanto, habilidades visuales y no visuales, sobre todo en la resolución de problemas y tareas, por lo que se hace necesario estudiar qué tipo de estrategias son utilizadas y para qué tipo de tareas son importantes dichas estrategias” (Gorgorió, 1998).

3.3. Aspectos metodológicos de la propuesta

El enfoque pedagógico de la propuesta responde a la síntesis de lo que tienen en común las habilidades espaciales en el estudio de la geometría, desde un aprendizaje significativo.

Según han demostrado las investigaciones, si bien el disponer de habilidades espaciales desarrolladas provoca una comprensión de los conceptos matemáticos, el no disponerlas conduce a todo lo contrario (Prokysek y Stipek, 2016).

Goncalves (2006) afirma, que los docentes deben buscar estrategias didácticas para aplicar en sus intervenciones de aula, en las que los estudiantes desarrollen su razonamiento intelectual, descubriendo así cómo la geometría es una herramienta útil para la vida, y priorizar actividades en las que el alumnado realice conversiones entre el lenguaje gráfico y simbólico de las matemáticas (Gatica y Ares, 2012), lo que hace necesarias herramientas que ayuden a la visualización de dichos conceptos para construir su conocimiento.

El proceso de enseñanza y aprendizaje que se imparte en la escuela debe entonces, despertar interés en los estudiantes (Area- Moreira, 2005), por lo que las metodologías activas de resolución, invención de problemas, o por descubrimiento permiten obtener esa motivación, eligiendo aquella más adecuada al contexto de aula. Así, en el uso de estas metodologías activas, se parte de los conocimientos que ya disponen, y se plantea cuestionarlos, generando inquietudes, a través de preguntas, concretas o abiertas, favoreciendo el espíritu crítico y la creatividad. Area- Moreira (2005) afirma: “Cuando se aprende a formular preguntas – relevantes, apropiadas y sustantivas – se aprende a aprender y nadie nos impedirá aprender lo que queramos.

A su vez, el aprendizaje cooperativo ha sido objeto de numerosas investigaciones en los últimos años, y Domingo (2008), Gavilán (1999) y Ovejero (1990) concluyen que a pesar de las dificultades que presenta su puesta en práctica, la intervención cooperativa mejora la motivación intrínseca, la autoestima y la capacidad crítica y calidad del procesamiento cognitivo de la información.

Es por ello que la dinámica planteada en la propuesta, se realiza mediante un aprendizaje cooperativo, en la que cada estudiante participa de manera activa, de tal forma que es consciente de su manera de aprender, los conocimientos, las dificultades que tiene, favoreciendo situaciones de trabajo autónomo, sin necesidad de la supervisión continua del profesorado (Gavilán,

1999). Además, la interacción entre ellos les proporciona la adquisición de las competencias transversales tan requeridas hoy en día para poder hacer frente al futuro, que las aportaciones de Delors (1996) apuntaban dentro del saber ser y saber convivir, y que Pujolás (2008) incluye en sus “9 ideas clave. *El aprendizaje cooperativo*”.

En cuanto a las ventajas específicas que aporta el trabajo cooperativo en las matemáticas, cabe destacar cómo la implicación activa y la interacción con otros estudiantes fomentan el reto intelectual y la curiosidad, provocando un mayor rendimiento (Webb y Faviar, citados en López, 2008), ya que se sienten más cómodos y motivados para especular, cuestionar y explicar conceptos y resolver problemas.

Respecto al tipo de actividades que potencian la capacidad espacial, las investigaciones analizadas presentan distintos tipos de actividades que involucran habilidades espaciales de visualización y orientación espacial, y realizan una triple clasificación de las tareas en categorías (Gaulin, 1985; Berthelot y Salin, 1994; Gorgorió, 1998). Gonzato, Fernández Blanco y Díaz Godino (2011), se basan en ellas, y establecen tres grandes familias de actividades, según el tópico a tratar:

1. Orientación estática del sujeto y de los objetos
2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales
3. Orientación del sujeto en espacios reales

La propuesta didáctica encaja en esta tercera familia, en la que quedan incluidas actividades de reconocimiento, descripción, construcción, transformación e interpretación de espacios del entorno real.

Al igual que Fortuny (1998) la propuesta plantea el diseño de actividades orientadas a la facilitación, activación y desarrollo de procesos clave en la educación de las competencias geométricas, como son la visualización, la exploración y la modelización. Y, tomando como referencia la taxonomía de Bloom (1956), se plantea la secuenciación de las mismas, en fases acordes a las habilidades a desarrollar en cada una de ellas, y que nos permitirá establecer el nivel en el que se engloban los objetivos de aprendizaje establecidos para cada intervención de aula.

La secuenciación en fases se definirá en función de los requerimientos propios de la metodología a emplear, que va orientando al estudiante desde el

reconocimiento de la geometría en la imagen hasta el razonamiento, siguiendo los cinco niveles de Van Hiele (1957) que se producen con cada aprendizaje nuevo: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor.

Así, la estructura de la propuesta permite la evolución del conocimiento, de lo sencillo a lo complejo, de los elementos individuales, a la composición y abstracción en fórmulas y demostraciones, que se plantea como un camino de ida y vuelta, un ejercicio de entrenamiento que desarrolla a lo largo de las actividades planteadas. Porque es a partir del ejercicio y entrenamiento de las habilidades espaciales, cuando éstas se van ampliando, hasta que se producen de manera natural, facilitando así la adquisición de los conocimientos geométricos.

En la estructura de planteamiento de las actividades se incluyen los elementos de exposición por parte del docente, discusión entre el docente y alumnado, realización de trabajos prácticos adecuados, consolidación y práctica de destrezas y rutinas básicas, resolución de problemas, que indica en Informe Crockfort (1985, párrafo 243) como guía de actividades. Y por tanto permite un diseño de actividades flexible, adaptable al contexto concreto, a la atención de la diversidad, y puede utilizarse de manera interdisciplinar.

Y por último, respecto a los materiales y recursos didácticos a utilizar para favorecer el aprendizaje de la geometría a través de la visualización, en la actualidad existen muchos autores que proponen diversidad de ellos en sus investigaciones: dibujar un objeto del espacio (2D y 3D) y estudiar sus propiedades (Pittalis, Mousoulides y Crristou (2009) citados en Rojas (2013); rotar un objeto (2D y 3D) (Gorgorió, 1996, 1998); reconocer vistas ortogonales o perspectivas de composición de edificios (Ben-Chain, Lappan y Houang, 1988); dibujar el desarrollo de un cuerpo geométrico (Fischbein, 1993); visualizar el efecto de transformaciones de sólidos, o imaginar la perspectiva de un sólido (Malara, 1998); representaciones de sólidos (Gaulin, 1987), etc.

Existen además muchos otros recursos, y cualquiera de ellos podría utilizarse dentro de la propuesta didáctica, para favorecer el aprendizaje de la geometría desde la visualización, a requerimiento de las distintas fases, para el logro de los objetivos establecidos. Además, en este trabajo se propone un listado de recursos visuales de distintos ámbitos que pueden ser utilizados para

el diseño de las actividades, que pretenden servir de referencia a otros docentes para el diseño de sus intervenciones de aula de manera significativa.

Se plantea por tanto una propuesta metodológica genérica para la enseñanza de la geometría, que integre en su diseño el ámbito visual de la inteligencia, y que sirva de guía a otros docentes para el diseño de actividades.

4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

4.1. Introducción

Queda patente la importancia de la percepción visual en la interpretación del espacio y las relaciones de los elementos que componen el entorno vital que acompaña al alumnado. Además, y dado que la capacidad espacial se puede reforzar y potenciar, se presenta a continuación una propuesta metodológica de intervención en el aula, como respuesta a los objetivos establecidos, para la estructuración y organización de intervenciones didácticas a partir de la visualización, que favorezca un desarrollo equilibrado y progresivo de la capacidad espacial en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

La propuesta didáctica que aquí se define, se plantea como una estrategia en sí misma, y pretende dar respuesta al tercer problema que indica Arrieta (2003), en el que propone analizar diferentes modelos de propuestas didácticas e integrarlas en un modelo común que favorezca un desarrollo equilibrado y progresivo de la capacidad espacial dentro de la educación matemática.

Pretende servir de modelo para la reflexión y que ayude a otros docentes a desarrollar un estilo de enseñanza y aprendizaje de la geometría de manera más significativa.

4.2. Propuesta metodológica

Se proponen a continuación unas pautas metodológicas que permiten diseñar intervenciones de aula en las que desarrollar un pensamiento abierto y divergente, facilitando y agilizando el manejo de contenidos e ideas en el proceso de abstracción matemática.

Posteriormente se define la metodología de trabajo en el aula, estructurada en el esquema de desarrollo de las unidades didácticas, para continuar con la realización de un ejemplo de aplicación práctica de la propuesta didáctica, a desarrollar a lo largo de la programación anual del aula, en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Pautas metodológicas

La propuesta está encaminada hacia la consecución del objetivo principal de mejora de las habilidades espaciales de los estudiantes para la asimilación de la geometría, y se fundamenta en dos aspectos:

- La enseñanza de los conceptos geométricos que establece la normativa educativa a través del currículo educativo y los indicadores de logro para adquirir las competencias clave que debe adquirir el estudiante en cada etapa educativa.
- La necesidad de utilizar recursos atractivos para la comprensión de los conceptos matemáticos desde la visualización para su transformación al lenguaje simbólico abstracto.

Las pautas metodológicas incluidas en la propuesta didáctica que permiten favorecer y ejercitar las habilidades espaciales y el razonamiento matemático, que se concretarán en el apartado siguiente son las siguientes:

1. **Contextualización:** dar respuesta a un contexto determinado: nivel de enseñanza, objetivos específicos, contenidos, materia, metodología, recursos disponibles.
2. **Estrategias de visualización y razonamiento:** utilizar estrategias de visualización desde la motivación y la percepción visual.
 - Visualizar una imagen: estimular al estudiante a través del estudio de la información suministrada, percibir detalles visuales.
 - Habilidades que se desarrollan: percepción visual, el razonamiento lógico, la expresión verbal, y su aplicación a otras áreas de matemáticas o de otras materias.
3. **Metodologías activas, cooperativas:** incluir metodologías activas, constructivistas, que permitan un aprendizaje significativo, emotivo y vivencial, de manera cooperativa.
4. **Actividades secuenciadas y temporalizadas:** diseñar actividades que estimulen las habilidades espaciales, permitiendo así la organización de estructuras mentales que favorezcan la calidad del razonamiento matemático y promuevan la iniciativa y toma de decisiones ante un problema.
5. **Recursos visuales atractivos:** recursos manipulativos y tecnológicos.
6. **Adaptación a la diversidad:** atención a los distintos ritmos de aprendizaje, con la observación y el guiado en la resolución de las actividades. Con material de refuerzo, y de ampliación.

Metodología de trabajo en el aula – esquema de la propuesta

Esta propuesta metodológica está pensada para desarrollarse a lo largo de la programación anual del aula, en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, para la asignatura de matemáticas, aunque podría plantearse de manera interdisciplinar. Se indicarán en el apartado correspondiente, dentro de las actividades diseñadas, las posibilidades de interdisciplinariedad, para lo que se deberían adaptarse incluyendo en ellas otros contenidos curriculares de las materias implicadas.

Se presenta a continuación la metodología de aula, donde se concretan las pautas metodológicas, en la organización general de cada actividad acorde al contexto y contenidos a trabajar, y la manera en que se pueden abordar en las sesiones de aula, y que se recoge en el anexo II. a modo de esquema en una ficha.

Ya que la propuesta se plantea para ser incluida en la programación de aula, su esquema sigue la estructura docente de las unidades didácticas, tal y como se define a continuación.

4.2.1. Introducción

La propuesta metodológica requiere ser contextualizada, es decir, concretarse en un contexto determinado, respondiendo a los objetivos establecidos, teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

- Contexto didáctico:
 - o Diagnóstico y nivel de capacidad espacial del alumnado
 - o Contextualización del conocimiento
 - o Etapa y nivel de enseñanza
 - o Desarrollar las habilidades espaciales: la percepción y visualización, la orientación espacial.
- Contenido concreto a trabajar, coherentes con los contenidos curriculares.
- Materia: matemáticas, o interdisciplinar: relacionada de manera directa con tecnología y dibujo técnico.
- Metodologías a utilizar
- Recursos didácticos disponibles

Por tanto, el desarrollo de la intervención podría llevarse a cabo a lo largo de una o varias unidades didácticas del curso escolar, en función de los

contenidos que se pretenda abarcar con ella, siempre dentro del mismo esquema de organización propuesto. Concretamente diseñada según el enfoque que se quiera aplicar al contexto concreto, es decir, variando las maneras de aplicación, las dinámicas (individual, por grupos), planteamiento y diseño de las actividades (resolución de problemas, por descubrimiento, invención de problemas, etc.)

4.2.2. Currículo

El currículo de la Educación Secundaria Obligatoria está recogido en el Decreto 236/2015, de 22 de diciembre, y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco (BOPV, 15-01-2016)¹, y en el Anexo II se concreta la organización de la asignatura de matemáticas, dividida en cinco bloques. Además establece los Objetivos didácticos de etapa, y los Contenidos, Criterios de Evaluación e Indicadores de logro correspondientes a cada bloque².

La propuesta trabaja todos los objetivos de etapa, aunque en los apartados 3 y 5 se hace referencia directamente al objeto concreto de la misma:

OBJETIVOS DE ETAPA
3. <i>Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos, relaciones y propiedades para describir la realidad, aplicando los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea y resolver problemas a él referidos."</i>
5. <i>Razonar y argumentar utilizando elementos del lenguaje común y del lenguaje matemático, (números, tablas, gráficos, figuras) acordes con su edad, que faciliten la expresión del propio pensamiento para justificar y presentar resultados y conclusiones de forma clara y coherente.</i>

Tabla 1. Objetivos de etapa. Decreto 236/2015 (BOPV, 15-01-2016).

4.2.3. Objetivos

Dado que el cambio en el sistema educativo debe ser gradual, se parte de los contenidos curriculares vigentes en la normativa autonómica, aplicando nuevos enfoques desde la innovación.

¹ <https://www.euskadi.eus/decretos-curriculares-de-la-capv/web01-a3hbhezi/es/>

² Ver Anexo I. Figura 2. Relación de contenidos, criterios de evaluación e indicadores de logro, y competencias. 3º Educación Secundaria Obligatoria: Enseñanzas Académicas.

Evidentemente, el objetivo principal de aprendizaje de la propuesta genérica coincide con el general indicado anteriormente, a partir del cual se derivan otros objetivos específicos:

- Valorar la importancia que tienen las matemáticas en el entorno en los distintos ámbitos, en imágenes de la naturaleza, arte, arquitectura, urbanismo, diseño, etc.
- Saber identificar y clasificar los distintos cuerpos geométricos
- Ser capaz de calcular áreas y volúmenes de poliedros (y cuerpos de revolución), y contextualizarlos en la imagen del entorno.
- Usar el razonamiento matemático para escoger las estrategias de resolución, invención del problema.
- Desarrollar el pensamiento crítico reflexionando de manera más profunda acerca de las propiedades matemáticas, así como otros ámbitos relacionados con las mismas, sociales, etc.
- Desarrollar la creatividad para afrontar nuevas situaciones.

4.2.4. Competencias

Las competencias básicas ³ que adquiere el alumnado y que irán desarrollando a lo largo del desarrollo de las actividades diseñadas, unas de manera continuada, como son la competencia matemática (CM), aprender a aprender (AA), y aprender a ser (AS), aunque en cada momento predomina alguna sobre el resto, relacionándose de manera directa con las habilidades espaciales, de razonamiento, comunicación, o trabajo cooperativo:

- **CM:** Competencia matemática: comprende la adquisición de destrezas en la resolución de la imagen geométrica, razonando matemáticamente.
- **CT:** Competencia tecnológica: con la búsqueda de información, visualización de vídeos, práctica de las aplicaciones informáticas.
- **CL:** Competencia en comunicación lingüística y literaria: en la interpretación de los enunciados, puesta en común en la deliberación e las estrategias a seguir, y transmisión de los resultados.
- **AA:** Competencia para aprender a aprender y pensar, y **AS:** Competencia para aprender a ser: se adquieren ambas al dar autonomía al alumnado en

³ Decreto 236/2015 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad del País Vasco, (BOPV, 15-01-2016).

la resolución de las actividades, poniendo en práctica los conocimientos teóricos, comprendiendo los enunciados, desde un planteamiento abierto, con creatividad, escogiendo con actitud crítica el camino a seguir en la resolución.

- **IEE:** Competencia para la iniciativa y espíritu emprendedor: en la iniciativa de resolución y la creatividad en la resolución de nuevas situaciones.

4.2.5. Contenidos

Los contenidos curriculares indicados en el Anexo II del Decreto 236/2015, que se propone trabajar en la propuesta educativa corresponden a la etapa educativa de Secundaria, y se engloban dentro del Bloque 3. Geometría y Medida, en concreto se han escogido aquellos que fácilmente pueden estar representados en el entorno, y por tanto tienen relación directa con el espacio.

CONTENIDOS CURRICULARES
1º ESO <ul style="list-style-type: none"> • <i>Elementos básicos para la descripción de figuras en el plano y en el espacio: puntos, rectas, segmentos, ángulos, caras, etc.</i> • <i>Elementos sobre segmentos y ángulos: mediatriz, bisectriz</i> • <i>Figuras en el espacio: Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos.</i> • <i>Figuras en el plano: triángulos, cuadriláteros y otros polígonos. Elementos y características. Análisis de relaciones y propiedades: paralelismo y perpendicularidad. Clasificación según diferentes criterios.</i> • <i>Polígonos regulares. Su construcción y propiedades.</i> • <i>Medidas y cálculo de ángulos en figuras planas.</i> • <i>La circunferencia y el círculo. Propiedades.</i> • <i>Simetrías de figuras planas. Sus aplicaciones y usos. Mosaicos y sus propiedades.</i> • <i>Estimación y cálculo de perímetros y áreas de figuras simples mediante diversos procedimientos.</i> • <i>Técnicas para el uso de diversos instrumentos y formatos (incluidos los digitales) para dibujar y medir figuras planas y espaciales.</i>
2º ESO <ul style="list-style-type: none"> • <i>Figuras en el plano: triángulos, cuadriláteros y otros polígonos. Elementos y características. Descripción de sus propiedades y cálculos métricos directos e indirectos sobre ellos.</i> • <i>Triángulos rectángulos: Teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y sus aplicaciones</i> • <i>Semejanza de figuras. Proporcionalidad entre segmentos. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes.</i>

- *Teorema de Thales. Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza.*
- *Representación a escala. Mapas.*
- *Poliedros y cuerpos de revolución más comunes: cubo, prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera. Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación.*
- *Estimación y cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos mediante diversos procedimientos*
- *Técnicas para el uso de diversos instrumentos, incluidas las herramientas informáticas, para dibujar figuras planas y espaciales y analizar relaciones geométricas.*

3º ESO Académicas. Aplicadas

- *Geometría del plano. Determinación de figuras o configuraciones geométricas a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.*
- *Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.*
- *Escalas. Razón de semejanza.*
- *Aplicación a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.*
- *Los movimientos en el plano: Traslaciones, giros y simetrías. Elementos invariantes de cada movimiento. Su aplicación al análisis y representación de configuraciones geométricas.*
- *Geometría del espacio: Poliedros. Poliedros regulares. Cuerpos de revolución. Elementos característicos y propiedades. Áreas y volúmenes.*
- *La esfera. Intersecciones de planos y esferas.*
- *El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.*
- *Pautas para la interpretación de mapas y análisis de errores.*
- *Técnicas de uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, movimientos, configuraciones y relaciones geométricas.*

4º ESO Académicas. Aplicadas

- *Cálculo de medidas indirectas mediante los teoremas de Thales y Pitágoras.*
- *Métodos para la resolución de problemas de medida, cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.*
- *Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Razón de semejanza*
- *Trigonometría básica: relaciones fundamentales. Relaciones métricas en los triángulos.*

Tabla 2. Contenidos curriculares Decreto 236/2015 (BOPV, 15-01-2016).

Sin embargo, dada la versatilidad de la propuesta, tal y como se ha comentado anteriormente, los contenidos geométricos podrían relacionarse también con los de otros bloques, por ejemplo aquellos incluidos en los bloques de álgebra o estadística y probabilidad.

4.2.6. Estrategias de intervención

Generalmente las dificultades en el aprendizaje están relacionadas con las estrategias de enseñanza de la geometría que utiliza el docente, más que con el contenido en sí.

Es por ello que las estrategias que se pretenden fundamentar en este apartado, para explicar los contenidos geométricos, corresponden a las pautas metodológicas antes definidas, y que se constituyen dentro de la propuesta objeto del trabajo. Se consideran útiles para un aprendizaje significativo de la geometría:

1. El diseño de actividades con contenido de visualización y razonamiento espacial, es decir, mediante la visualización de imágenes, se estimule y desarrollen las habilidades espaciales, que ayuden al alumnado en la asimilación de los conceptos geométricos.
2. El aprendizaje cooperativo, con la participación activa del alumnado.
3. Utilización de recursos motivadores atractivos visualmente, tanto manipulativos como tecnológicos.

Se trata por tanto de una propuesta metodológica de diseño, a partir de imágenes del entorno cotidiano, donde se desarrollan actividades sobre la geometría plana y espacial, para poner en práctica el aprendizaje significativo, para mediante la visualización y análisis crítico, comprender el nivel de abstracción de los conceptos geométricos.

4.2.7. Metodología

La propuesta se enmarca dentro de un enfoque activo, constructivo, desde un aprendizaje emotivo y vivencial, de tal forma que permite que los estudiantes se enfrenten a distintas situaciones que necesitan ser resueltas, comprobadas y favorece la reflexión sobre ellas, para alcanzar un mayor nivel de adquisición de sus conocimientos.

El modelo propuesto puede utilizarse aplicando diversas metodologías educativas, en función del tipo de enseñanza que decida utilizar el docente acorde al contexto educativo, y a las competencias a trabajar. Así, su versatilidad permite adecuarlo a distintas dinámicas, como son el trabajo de toda la clase, a nivel grupal en pequeños equipos, o a nivel individual, y contener más o menos información, adaptada a la diversidad, etc.

Se proponen por tanto, metodologías activas, que huyen de los modelos de clase magistral, dentro de las cuales se indican aquellas que se consideran más apropiadas para favorecer el aprendizaje cooperativo:

- De resolución de problemas (deductiva): basada en el aprendizaje de los conceptos mediante actividades inmersas en un contexto, y requiere tres etapas: motivadora, de resolución del problema, y la aplicación, para profundizar y comprobar los conocimientos adquiridos.
- Aprendizaje por descubrimiento: igualmente requiere la participación activa de los estudiantes, propiciando investigación, reflexión y búsqueda de conocimiento.
- Invención de problemas (inductiva): dar distintos ejemplos, ver los patrones y las relaciones que se establecen en ellos, a partir de los cuales llegar a los conceptos.

Todas ellas permiten establecer conexiones entre los contenidos previos y los conceptos nuevos, que el alumnado reflexione a partir de la imagen y analizarlos con sentido crítico, y transformarlos así en otros más estructurados y rigurosos. Además dichas metodologías de trabajo cooperativo fomentan a su vez el aprendizaje entre los estudiantes, y se estimula la actividad creadora, en la búsqueda de su propio material en torno a los conceptos tratados.

En ellas es clave el papel del docente, en su misión de guía y orientador en la construcción del conocimiento en los estudiantes, acorde al ritmo individual de aprendizaje, y que realizará durante el proceso de desarrollo de las actividades, comprobando a su vez si de los planteamientos diseñados con antelación están dando sus frutos y consiguen captar al alumnado.

En cuanto a la dinámica, se propone mediante un aprendizaje cooperativo, en la que cada estudiante participa de manera activa, en grupos heterogéneos, creando grupos equilibrados (aproximadamente 4-5 estudiantes) en función de los ritmos de aprendizaje, de tal forma que se ayuden y trabajen a su vez las competencias transversales de trabajo en equipo, compañerismo, empatía, iniciativa, convivencia, espíritu crítico, tan necesarias al igual que los conocimientos teóricos para los estudiantes para responder a su día a día.

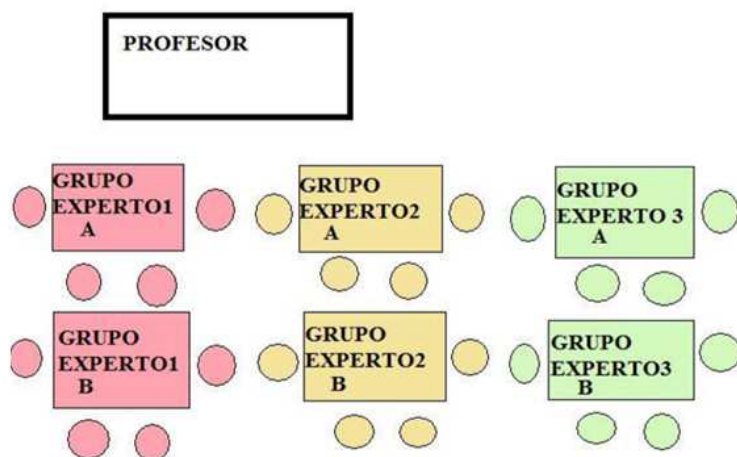


Figura 3. Modelo de creación de grupos cooperativos (Pere Pujolàs)⁴

La propuesta permite a su vez la participación activa mediante la puesta en común a partir de la identificación de los conceptos en la imagen, explicando cada uno, las propiedades, etc.

4.2.8. Diseño de las actividades

Siguiendo las pautas a seguir que ofrece la metodología planteada, se podrán diseñar específicamente las actividades que se pueden realizar en el aula para el ejercicio de las capacidades viso-espaciales, teniendo en cuenta los siguientes criterios de diseño, de secuenciación y temporalización que se indican a continuación.

Criterios de diseño

Para garantizar un buen diseño de las actividades se plantean unos parámetros a tener en cuenta:

- Que la actividad sea relevante para su experiencia personal y les ayude a visualizar los conceptos matemáticos.
- Seleccionar imágenes sorprendentes, en busca de problemas actuales y aplicarlos, conectados con la vida de los estudiantes, que permita desarrollar la capacidad de cuestionarse cosas, formular buenas preguntas o discutir ideas relevantes.
- Escoger una imagen de una experiencia real, que permita la adquisición de habilidades espaciales, provocando un aprendizaje significativo.

⁴ Pujolàs Maset, P. (2012). Aulas inclusivas y aprendizaje cooperativo. *Educatio Siglo XXI: Revista de La Facultad de Educación*.

- Plantear una serie de preguntas que susciten curiosidad, de manera general o guiada, permitiendo así la búsqueda de respuestas por ellos mismos, reteniendo así la información (se activa así el hemisferio derecho).
- Hacer diagramas, mapas visuales, esquemas y gráficos para ayudar a su memoria. Enfatizar la memoria a largo plazo y la información significativa.
- Incluir aspectos relacionados con habilidades de visualización y razonamiento espacial (realizar cortes de figuras, rotar figuras en 2D y 3D, buscar simetrías, desarrollar y transformar cuerpos tridimensionales, analizar puntos de vista de una composición, componer formas, etc.)
- Flexibilidad: diseño de manera transversal a una o varias unidades didácticas, o interdisciplinar.

Por lo tanto, teniendo en cuenta estos criterios, la metodología de trabajo en el aula que se propone es el diseño de actividades a partir de la visualización de imágenes que responden a una situación real, que les motiven y donde se identifiquen aspectos de la geometría en el entorno inmediato, para trabajar los contenidos matemáticos.

Las imágenes no se plantean simplemente para ser visualizadas (mirar), sino que responderán a preguntas asociadas a ellas, guiando así el trabajo de los contenidos geométricos sobre las mismas, de tal forma que se favorezca la reflexión y el análisis de los conceptos. Las imágenes serán objeto de planteamiento de problemas o retos que motiven al alumnado, potenciando su autoestima y que le hagan creer en sus capacidades, contribuyendo a su vez a fomentar el pensamiento lateral.

Las preguntas a plantear pueden ser guiadas o abiertas, para promover la creatividad y la búsqueda de estrategias de resolución diversas. Se ordenarán secuencialmente desde lo sencillo a lo complejo, lo que permite a su vez la adaptación a todos los ritmos, de manera que algunos llegarán a completar todas, y otros se quedarán a medias.

Las actividades que se incluyen dentro de la propuesta forman parte del currículo de secundaria, y por lo tanto contemplan los contenidos matemáticos de geometría para adquirir las competencias básicas establecidas en dicha etapa educativa. Y responderán a su vez a la metodología y a plantear en

dinámicas diferentes como son la resolución de problemas, exposiciones, debates, etc.

Secuenciación de las actividades:

Tal y como se ha indicado en el marco teórico, tomando como referencia la taxonomía de Bloom (1956) y los niveles de razonamiento de Van Hiele (1957), la propuesta metodológica plantea un desarrollo de cada actividad secuenciado en fases, utilizando la clasificación de capacidades, aplicada a los contenidos correspondientes, de tal forma que responda al objetivo de aprendizaje establecido en cada actividad.

1. **Visualización** de una imagen real – interés y **motivación** desde la experiencia.
 - Representaciones externas de la realidad, donde todos los elementos están relacionados entre sí.
 - Elección imagen en función de los contenidos a trabajar.
2. **Reconocimiento e identificación** de los conceptos geométricos en ella – revisión de los conocimientos previos
 - Imágenes mentales
3. **Aprendizaje y comprensión** de conceptos nuevos – repaso y ampliación de conocimientos
4. **Análisis y síntesis**, aplicación y ejercitación de los conceptos, puesta en práctica sobre la imagen, relacionar, interpretar, comprensión de la abstracción de los conceptos teóricos en ella.
5. **Comprobación** de los conceptos teóricos en la imagen: generalización y valoración de los resultados.
 - reafirmar los conceptos deducidos sobre la imagen
6. **Creación y síntesis**, aplicación de los conocimientos a nuevas situaciones
7. **Valoración y evaluación**, puesta en común de los resultados sobre la imagen.

En función de la metodología elegida, las fases serán ordenadas individualmente o en bloque agrupando varias, y definidas, respondiendo a la metodología concreta (de resolución de problemas, de descubrimiento, de invención de problemas).

El docente realizará el seguimiento y guiado del proceso de la actividad acorde a las fases establecidas, insistiendo en que la resolución/ invención de los problemas respondan al objetivo inicial, y estén reflejados todos los datos matemáticos necesarios. En concordancia con el aprendizaje cooperativo, la labor del docente es como mediador, facilitador en el proceso de descubrir, a través de preguntas y ejemplos, para generar debate dentro del grupo, de tal forma que ellos y ellas mismas fundamenten sus respuestas, organicen sus ideas y lleguen a la comprensión de los conceptos.

Se recomienda realizar un esquema de la actividad mediante:

- Fichas de guía de organización de la actividad – reto (según el modelo de la propuesta).
- Esquema de planificación del reto/ problema.

Temporalización

Las actividades podrán ser temporalizadas según la programación de aula, en varias sesiones, dentro de una o varias unidades didácticas. Las sesiones serán previamente organizadas de manera flexible, de tal forma que se adecúen al ritmo concreto de cada sesión.

El diseño de cada sesión responderá a la siguiente estructura:

Estructura de las sesiones	
1. Fase inicial, introducción	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación – motivación. • Conocer las ideas previas. • Resolver dudas que vayan surgiendo sobre los temas vistos en días precedentes.
2. Fase de desarrollo	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción de nuevos conceptos. • Aplicación de aprendizajes: ejercicios sobre imágenes • Reestructuración de los aprendizajes: con la recapitulación y resumen de lo visto en la sesión.
3. Fase de aplicación,	<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de la actividad.

consolidación y comunicación	<ul style="list-style-type: none"> • Puesta en común⁵. • Refuerzo/ampliación mediante explicaciones y nuevos ejercicios a quien lo requiera
------------------------------	--

Tabla 3. Temporalización. Estructura de las sesiones

En cuanto a la dinámica de las sesiones, se plantea mediante ejemplos o situaciones reales, atractivos gráficamente, o tecnológicos, que estimulen la participación activa del alumnado.

Por lo tanto, la metodología de trabajo en el aula que se propone es el diseño de actividades a partir de imágenes que responden a situaciones reales, donde se identifiquen aspectos de la geometría en el entorno inmediato, para la explicación de los contenidos matemáticos, de manera secuenciada, y temporalizadas en sesiones, que serán evaluadas para medir el rendimiento académico de los estudiantes de secundaria.

4.2.9. Evaluación

La evaluación de la intervención educativa se diseñará en función de los criterios de evaluación e indicadores de logro establecidos en el Anexo II al Decreto 236/2015 del Currículo de la Educación Básica (Comunidad Autónoma del País Vasco), que están relacionados con los objetivos, contenidos y competencias seleccionadas⁶.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro
<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer los movimientos en el plano que transforman una figura geométrica en otra y utilizarlos para analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte o configuraciones geométricas presentes en la naturaleza y para crear sus propias composiciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoce los efectos de traslaciones, giros y simetrías. • Identifica los elementos característicos de traslaciones giros y simetrías. • Genera composiciones geométricas propias con creatividad y gusto por el trabajo bien hecho. • Analiza los movimientos existentes en mosaicos y configuraciones geométricas

⁵ Nota: La puesta en común se definirá en función de la metodología a utilizar:

- Al principio, con los conocimientos previos
- Durante, en el caso de invención de problemas
- Al final, después de la resolución del problema

⁶ Ver Anexo I. Figura 2. Relación de contenidos, criterios de evaluación e indicadores de logro, y competencias. 3º ESO. Matemáticas Académicas.

<ul style="list-style-type: none"> • Identificar relaciones de proporcionalidad geométrica y calcular medidas directas o indirectas en situaciones reales, empleando instrumentos, técnicas o fórmulas adecuadas. • Reconocer, describir y calcular los elementos y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales e identificar las coordenadas geográficas en la esfera terrestre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica figuras semejantes, establece relaciones de proporcionalidad entre elementos homólogos y calcula la razón de semejanza. • Aplica el teorema de Thales y utiliza la semejanza de triángulos en la resolución de problemas geométricos. • Aplica el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas métricos. • Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y superficies a partir de planos, mapas, fotos aéreas... • Identifica y describe lugares geométricos a partir de sus propiedades.. • Reconoce y describe los principales poliedros y cuerpos de revolución. • Identifica en los poliedros y cuerpos de revolución sus elementos principales (ejes, planos de simetría). • Calcula áreas y volúmenes de poliedros, pirámides, conos y esfera. • Identifica polos, meridianos, paralelos y el ecuador sobre el globo terráqueo. • Sitúa un punto sobre la esfera terrestre a partir de su latitud y longitud.
<ul style="list-style-type: none"> • Abordar problemas de la vida real y pequeñas investigaciones, organizando y codificando informaciones, elaborando hipótesis, seleccionando estrategias y utilizando tanto las herramientas como los modos de argumentación propios de las matemáticas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Selecciona las variables fundamentales desechando las irrelevantes para el estudio del fenómeno. • Usa modelos matemáticos adecuados para matematizar las distintas situaciones reales. • Organiza y codifica adecuadamente la información. • Asume hipótesis y elabora conjeturas plausibles. • Utiliza el lenguaje matemático con el rigor y precisión adecuados para explicar el proceso seguido, así como las herramientas tecnológicas para elaborar y compartir la información. • Utiliza tanto el razonamiento deductivo como inductivo. • Contextualiza y revisa los resultados obtenidos.
<ul style="list-style-type: none"> • Valorar y utilizar sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como la curiosidad, perseverancia y confianza en las propias capacidades, orden o revisión sistemática. • Integrarse en el trabajo en grupo, respetando y valorando las opiniones ajenas como fuente de aprendizaje y colaborando en el logro del objetivo común. 	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra interés y perseverancia en el trabajo. Presenta con orden, claridad y limpieza los resultados. • Justifica y expone, con el rigor acorde a su nivel, procesos y resultados • Colabora en el reparto de tareas para el trabajo en grupo y cumple los compromisos acordados. • Plantea alternativas y valora el proceso de discusión e intercambio de opiniones en el grupo como oportunidad de mejora.

Tabla 4. Criterios de evaluación e indicadores de logro (Decreto 236/2015).

La propuesta de intervención educativa propone evaluar el proceso de aprendizaje durante el desarrollo de las actividades, desde una evaluación inicial de diagnóstico, otra a lo largo del desarrollo de las actividades, y otra final (prueba de evaluación). Y tendrá en cuenta los siguientes criterios de diseño:

- A qué evaluación, unidad didáctica, corresponde la propuesta dentro del curso escolar.
- Evaluar el proceso de aprendizaje a lo largo de la intervención.
- Evaluar tanto los contenidos específicos como las habilidades transversales.
- Evaluar la creatividad: el aporte de imaginación y de nuevas ideas y soluciones originales y novedosas.
- En dos esferas: individual y grupal.
- Importancia del trabajo cooperativo.

Se evaluará individualmente a cada estudiante, a lo largo de todo el proceso y desarrollo de la actividad, de tal forma que se valore su evolución, respecto al punto de partida, antes y después de la actividad, cada uno en función de su ritmo de aprendizaje.

La estrategia de evaluación atiende a criterios diversos adaptados al ritmo de aprendizaje de cada estudiante, guiando la resolución de la actividad en el caso que se precise, observando a su vez sistemáticamente el proceso de resolución, de cada estudiante, respecto a sí mismo, y en su relación con los demás dentro del grupo. La propuesta propone valorar específicamente las destrezas espaciales individuales de cada estudiante, además de las cognitivas, y que pueden servir en la organización de los equipos. Se pretenden desarrollar dentro del aula, en dos ocasiones:

1. A nivel diagnóstico: al principio de curso se diagnosticará la situación de las habilidades espaciales del alumnado, mediante pruebas: genéricas, psicométricas, etc.
2. Al finalizar las actividades: para comprobar si las estrategias de ampliación de dichas habilidades han sido eficaces y les han ayudado en la resolución del problema.

En relación a los conocimientos matemáticos, se evaluarán de igual forma, de manera previa, y posterior a la realización de cada una de las actividades,

realizando una imprescindible labor de observación por parte del docente, a lo largo de todo el proceso de desarrollo de la actividad.

De esta forma, la evaluación de las actividades que forman parte de la propuesta didáctica permitirá a los docentes evaluar en la esfera individual,, tanto las habilidades espaciales y los conocimientos y razonamiento utilizado para su resolución. Se valorarán además las competencias transversales de cada estudiante, dentro del grupo, de trabajo en equipo, así y a nivel individual, observando su autonomía, espíritu emprendedor, reflexión crítica, etc.

Además de la evaluación de las actividades, la propuesta permite añadir otras actividades que sirvan de comprobación, mediante una prueba final de síntesis, de los conocimientos adquiridos en la/s unidad/es didáctica/s, que puede ser planteada al final de la evaluación.

La evaluación de las actividades se establecerá mediante rúbricas⁷, en la que se valoren las destrezas necesarias en la resolución de cada actividad, acordes a las fases concretas de desarrollo de la actividad. El peso en la calificación de cada actividad dentro del curso dependerá del número de actividades diseñadas a lo largo del mismo.

Para ello, se incluye el diseño de la propuesta una rúbrica genérica, de evaluación tanto de los contenidos curriculares, como de las competencias transversales, que se concretan en la aplicación práctica, con el diseño de varias tipologías de rúbricas, en función de los parámetros a evaluar, y la metodología utilizada, y que se incluyen en el anejo II:

1. Destrezas espaciales: en las fases de visualización e identificación.
2. Destrezas creativas: especialmente en la fase de creación.
3. Aprendizaje cooperativo: a lo largo de toda la actividad.
4. Conocimiento – conceptos matemáticos: especialmente en las fases de aplicación, resolución del problema y comprobación.
5. Resolución/ Invención de problemas: a lo largo de toda la actividad.

Se tendrán en cuenta los objetivos planteados al comienzo, evaluación del proceso de desarrollo de la actividad, y una prueba final de una actividad semejante a las diseñadas dentro de las unidades didácticas.

Se valorará si ha utilizado la imagen de apoyo, si sigue la estructura recomendada, la calidad de la redacción, los conceptos matemáticos utilizados

⁷ Ver Anexo II. Ficha de la propuesta metodológica. Diseño de actividades.

y las relaciones entre ellos, las estrategias de resolución para llegar al resultado, así como la implicación individual en la actividad.

A su vez para la evaluación a nivel individual, se podrán proponer ejercicios de autoevaluación, o de refuerzo, aportando otros ejemplos similares a los vistos en el aula, de tal forma que les permitan comprobar personalmente la comprensión y si han adquirido los conocimientos matemáticos, así como plantear actividades de final de evaluación, en la que se recojan y evalúen las competencias establecidas en los objetivos de etapa.

4.2.10. Materiales y recursos

Son muchos los materiales y recursos que existen en la actualidad para favorecer el aprendizaje de la geometría a través de la visualización, como los citados en marco teórico, y cualquiera de ellos podría utilizarse dentro de la propuesta didáctica que aquí se desarrolla, a requerimiento de las distintas fases, para el logro de los objetivos establecidos. Pueden agruparse en dos grandes grupos: los manipulativos y los tecnológicos.

El aprendizaje a través de elementos manipulables, hace que los distintos conceptos sean adquiridos de forma más duradera por el estudiantado, al relacionarlo con la experiencia vivencial. Entre ellos las construcciones, la papiroflexia, maquetas, modelos reales.

Por otro lado mediante los medios tecnológicos, ven cómo las formas geométricas cumplen determinadas propiedades, siendo conscientes de las partes fundamentales de cada una, y pueden así dibujarlas. Aquellos que permitan diseños en 2D y 3D: programas informáticos (Geogebra, Cabri, Matlab, Sketchup), realidad aumentada, impresoras 3D; realizar creaciones visuales: video, etc.

A este respecto cabe comentar la experiencia vivida en el periodo de prácticas, en la que se ha observado cómo los recursos visuales ayudan a una mejor comprensión de los conceptos teóricos. Se incluye en el anexo el material utilizado en dicha experiencia, y que da un claro ejemplo como en la actualidad hay docentes implicados y concienciados de los beneficios que aportan estos recursos para la mejora de los conocimientos de los estudiantes.

Sin olvidar el uso de los recursos de diseño básicos de todo proceso de enseñanza, como son los dibujos, esquemas, diagramas, etc. que acompañen a las explicaciones y exposiciones de los conceptos matemáticos.

Cabe sólo añadir los recursos docentes, es decir, aquellos que utilizan los docentes en su labor de intervención de aula, como las que tiene que ver con el planteamiento de las sesiones y la actividad: con explicaciones dinámicas y motivadoras, la observación, y la escucha activa, proponer situaciones cotidianas, matematización del entorno, fomentar la creatividad en la resolución y potenciar su autonomía personal; y por otro lado las técnicas basadas en la conducta: aplicación de refuerzos positivos, elogiar comportamientos adecuados y concretos, y reforzar la autoestima y la confianza en sí mismos.

A su vez, la propuesta metodológica propone un listado de recursos visuales de distintos ámbitos que pueden ser utilizados para el diseño de las actividades, y que se adjuntan en el anexo III.

4.2.11. Atención a la diversidad

La atención a los distintos ritmos de aprendizaje, tanto al alumnado con necesidades especiales, como aquellos con altas capacidades, se tendrá en cuenta en el diseño de las actividades, dado que se procura una secuenciación tanto de los contenidos teóricos, como en las preguntas de resolución planteadas, que vaya de lo sencillo a lo más complejo, de lo particular a lo general.

Como se ha indicado anteriormente como premisa de diseño de las actividades, se ha indicado la utilización de imágenes reales correspondientes a distintos ámbitos. Es ahí donde con su elección, donde el docente busca adecuarse al contexto, atender a los requerimientos del alumnado, a sus intereses, pudiendo aportar otros instrumentos de apoyo, como pueden ser textos y videos explicativos, de tal forma que se ofrezca respuestas diversificadas acordes a los distintos estilos de aprendizaje que dispone cada estudiante (visuales, secuenciales).

Además, en la elección de imágenes utilizadas para la explicación de los conceptos teóricos, se tendrán en cuenta los intereses particulares de cada estudiante, buscando elementos específicos para garantizar la atención de

cada uno de ellos, como por ejemplo si a alguno le gusta el manga japonés, un músico rapero famoso (con collar de formas geométricas), etc.

De igual forma, se recomienda preparar material de apoyo para aquellos estudiantes que dispongan de necesidades especiales, diseñando material de refuerzo, así como planteando preguntas abiertas, de mayor nivel y preguntas de ampliación, para aquellos que muestran mayor interés por el conocimiento matemático. Se plantean las necesidades más comunes que en la actualidad pueden encontrarse en el contexto educativo.

- Pautas para el alumnado con necesidades especiales:

TDAH:

- o Los alumnos con TDAH suelen aprender mejor en ambientes organizados y estructurados, así que será muy importante que todos los alumnos respeten las normas de convivencia en clase
- o Procurar ambientes ordenados y estructurados, que se cumplan las normas de convivencia en el aula
- o Se repetirán las preguntas con un lenguaje positivo, con explicaciones cortas, repitiéndola cuantas veces sea necesario.
- o Pedirle al estudiante que repita la pregunta
Devolverle un feedback inmediato y positivo, mediante un elogio (refuerzo positivo).

Problemas de lectoescritura:

- o Procurar ambientes ordenados y estructurados, con planificaciones cerradas, que se cumplan las normas de convivencia en el aula
- o Transmitir explicaciones claras, repitiéndolas si es necesario
- o Utilizar los recursos visuales

Problemas de idioma (alumnado extranjero que se incorpora a mediados de curso):

- o Se le repetirá y reformularán las preguntas todas las veces que sea necesario.
- o Apoyarse mucho en los recursos visuales, que en esta propuesta son muchos

- Pautas para alumnado con altas capacidades (con talento):

- o Actividades de ampliación (preguntas abiertas etc.)

- Actividades de creación, buscar otras imágenes del entorno donde se reflejen los contenidos matemáticos estudiados.

4.3. Aplicación de la propuesta metodológica

La aplicación práctica trata de concretar y especificar las pautas de la propuesta metodológica genérica en un contexto determinado, para el trabajo de los contenidos específicos de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en el curso de 3º ESO, secuenciados a lo largo de una evaluación.

Se plantea a continuación dicha aplicación práctica, mediante un ejemplo concreto, que se compone de varias actividades, conectadas entre sí a lo largo de un curso, y secuenciadas en función de los contenidos, a partir de la percepción visual de la realidad en distintos ámbitos de la vida.

Se incluyen actividades⁸ con diferente tipo de metodologías, contenidos, de destrezas usadas, tipo de evaluación, para que se haga patente la versatilidad de la propuesta de intervención planteada, a requerimiento del contexto al que tenga que responder cada docente. Aún así, y dado el carácter abierto de la propuesta, dependiendo del diseño propio de cada actividad, podrían servir para conectar con otros contenidos matemáticos, como los referentes al área de funciones, o probabilidad, incluso de manera interdisciplinar, relacionado con otras asignaturas en función de la temática utilizada..

Ya que la propuesta se plantea para ser incluida en la programación de aula, la aplicación práctica que aquí se propone seguirá la estructura de las unidades didácticas, tal y como se define a continuación.

4.3.1. Introducción

La propuesta se contextualiza en el curso académico de 3º de secundaria, dentro de las unidades didácticas correspondientes al bloque de geometría, para trabajar sus contenidos mediante metodologías activas de forma cooperativa, y se concreta en actividades secuenciadas y temporalizadas en sesiones, a partir de imágenes correspondientes a la realidad física, así como otros recursos visuales.

⁸ Ver Anexo II. Ficha de la propuesta metodológica. Diseño de actividades.

El listado planteado se compone de tres actividades, que abarcan los contenidos de geometría plana 2D, y 3D, de manera gradual, durante la primera evaluación del curso. Sin embargo, esta estructura podría replicarse igualmente para los dos cursos inferiores de secundaria, ya que los contenidos curriculares genéricos coinciden en ellos, y se podrían por tanto adaptar su grado de desarrollo y la profundidad de los contenidos. A su vez, se ha querido diseñar una cuarta actividad, para un nivel educativo superior, 4º ESO, que sirve de repaso y punto de partida del curso, para recordar los conceptos de geometría plana y espacial, a partir de los cuales se puedan añadir nuevos conceptos. Tal y como se expondrá más adelante, se utiliza otra metodología, de invención de problemas, que por las características de la misma, se considera adecuada para cursos superiores.

Cada actividad se fundamenta en una imagen que tiene relación con el contexto de la clase, para trabajar en ella la comprensión del nivel de abstracción de los conceptos geométricos establecidos. Se buscan experiencias próximas al alumnado, como pueden ser viajes programados, cercanía a los lugares escogidos, así como ejemplos donde la geometría se representa de manera atractiva, con trasfondo social, y que puedan estimular su interés y curiosidad. En cuanto al diseño de la actividad 4, se ha incluido un ejemplo con trasfondo social, pretendiendo captar al alumnado en otras esferas además de la matemática, que pueda generar reflexión y debate.

4.3.2. Objetivos

La aplicación práctica que aquí se propone sigue el objetivo principal de la propuesta metodológica, y además tiene en cuenta otros objetivos específicos acordes a los contenidos a trabajar en cada una de las actividades:

- Reconocer, identificar y comprender las figuras geométricas planas, sus propiedades, movimientos y sus efectos en mosaicos y configuraciones geométricas.
- Reconocer e identificar figuras semejantes, establecer relaciones de proporcionalidad entre elementos homólogos.
- Calcular dimensiones reales de medidas de longitudes y superficies a partir de una imagen.
- Generar composiciones geométricas propias con creatividad.

- Describir la situación y posición de objetos en el espacio, estableciendo sistemas de referencia y modelos de representación.
- Utilizar el software adecuado para estudiar e investigar movimientos de figuras en el plano.
- Reconocer, describir los cuerpos geométricos elementales, sus propiedades y sus elementos.

A su vez se ponen de manifiesto otros objetivos transversales que son vitales para su desarrollo personal, y que responden a la manera en que se ha organizado la actividad, de trabajo en grupo cooperativo:

- Desarrollar las habilidades interpersonales de autonomía, iniciativa, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- Desarrollar las habilidades de iniciativa en la toma de decisiones, liderazgo, trabajo en equipo.
- Desarrollar habilidad de comunicación dentro del grupo, y con el grupo-clase, del proceso seguido y los resultados obtenidos.
- Desarrollar la creatividad, en la resolución de problemas.

OBJETIVOS		
Actividad	Objetivos disciplinares	Objetivos transversales
Act. 1	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer, identificar y comprender las figuras geométricas planas (sus elementos y características), analicen sus movimientos en el plano, sus efectos en mosaicos y generen nuevas composiciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollar las habilidades interpersonales de autonomía, iniciativa, confianza en uno mismo y sentido crítico. • Desarrollar las habilidades de iniciativa en la toma de decisiones, liderazgo, trabajo en equipo.
Act. 2	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer, identificar y comprender las figuras geométricas planas curvas (elementos y características), establecer relaciones de proporcionalidad entre elementos homólogos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollar habilidad de comunicación dentro del grupo, y con el grupo-clase, del proceso seguido y los resultados obtenidos. • Desarrollar la creatividad, en la resolución de problemas.

Act. 3	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer, identificar y comprender las figuras geométricas del espacio (sus elementos y características), y generen nuevas composiciones.
Act. 4	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer, identificar y comprender las figuras geométricas planas (sus elementos y características), e inventen nuevas situaciones.

Tabla 5. Objetivos de las actividades.

4.3.3. Competencias

Con el desarrollo de las actividades diseñadas el alumnado irá adquiriendo gradualmente las competencias de la propuesta metodológica, a lo largo de las fases establecidas, y algunas específicamente en cada una de ellas, tal y como se ha definido en el apartado anterior de propuesta metodológica, y en el desarrollo concreto de la propia actividad definido en el anexo II, en el apartado correspondiente.

Actividad		
Competencias*		Fases de la actividad
CM CT CL	AA AS IEE	<ul style="list-style-type: none"> • Visualización • Reconocimiento e identificación • Aprendizaje y comprensión • Análisis y síntesis • Comprobación • Creación y síntesis • Valoración y evaluación

Tabla 6. Competencias y fases de la actividad.

(*)

CM: Competencia matemática

CL: Competencia en comunicación lingüística y literaria

CT: Competencia tecnológica

AA: Competencia para aprender a aprender y pensar

IEE: Competencia para la iniciativa y espíritu emprendedor

AS: Competencia para aprender a ser

4.3.4. Contenidos

En este caso concreto de aplicación práctica de la propuesta se han utilizado los contenidos de geometría propiamente dichos, que se engloban dentro del Bloque 3. Geometría y Medida⁹, en concreto se han escogido aquellos que fácilmente pueden estar representados en el entorno, y por tanto tienen relación directa con el espacio.

Actividad 1. Composición geométrica de mosaicos	
Contenidos curriculares	Contenidos de la actividad
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Geometría del plano. Determinación de figuras o configuraciones geométricas a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.</i> 	<p><u>Figuras planas</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Polígono y polígonos regulares: longitudes y áreas • Triángulos – puntos y rectas notables • Lugar geométrico: mediatriz, bisectriz
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Teoremas de Thales y Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Pitágoras – aplicaciones
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Los movimientos en el plano: Traslaciones, giros y simetrías. Elementos invariantes de cada movimiento. Su aplicación al análisis y representación de configuraciones geométricas.</i> 	<p><u>Geometría dinámica basada en la composición de movimientos de objetos en el plano.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Movimientos en el plano • Vectores • Traslaciones • Giros • Simetrías axial y central

⁹ Ver Anexo I. Tabla 2. Tabla 2. Contenidos curriculares Decreto 236/2015 (BOPV, 15-01-2016)

	<ul style="list-style-type: none"> • Ejes y centro de simetría en figuras planas • Movimientos inversos
Actividad 2. Figuras circulares de la plaza de los Fueros	
Contenidos curriculares	Contenidos de la actividad
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Geometría del espacio: Poliedros. Poliedros regulares. Cuerpos de revolución. Elementos característicos y propiedades. Áreas y volúmenes.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Circunferencia y círculo: longitudes y áreas • Lugar geométrico: parábola, hipérbola
Actividad 3. Cubiertas del Museo de Arte Moderno y Arquitectura de Estocolmo	
Contenidos curriculares	Contenidos de la actividad
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Geometría del espacio: Poliedros. Poliedros regulares. Cuerpos de revolución. Elementos característicos y propiedades. Áreas y volúmenes.</i> • <i>La esfera. Intersecciones de planos y esferas.</i> 	<p><u>Elementos de la geometría del espacio</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Puntos, rectas y planos: posiciones relativas de dos rectas en el espacio, posiciones relativas de una recta y un plano, ángulos diedros, perpendicularidad en el espacio • Poliedros, fórmula de Euler, prismas, poliedros regulares. • Áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución: de prismas, de pirámides, de cilindros, de conos, esfera. • Áreas y volúmenes de otros cuerpos geométricos. • Simetrías y cuerpos geométricos • Cuerpos de revolución: cilindro, cono, tronco de cono, esfera • El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Elementos geométricos de la esfera terrestre. Coordenadas geográficas.
Actividad 4. Invención de un problema en Superkilen Park	
Contenidos curriculares	Contenidos de la actividad
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Métodos para la resolución de problemas de medida, cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.</i> 	<p><u>Figuras semejantes. Teorema de Tales.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Polígonos semejantes. • Razones de longitudes, áreas y volúmenes.

<ul style="list-style-type: none"> • <i>Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Razón de semejanza</i> 	<u>Criterios de semejanza de triángulos.</u> <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de la altura • Teorema del cateto. • Medida de ángulos: aplicación de la semejanza.
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Trigonometría básica: relaciones fundamentales. Relaciones métricas en los triángulos.</i> 	<u>Trigonometría</u> <ul style="list-style-type: none"> • Razones trigonométricas de ángulos. • Identidades trigonométricas • Ecuaciones trigonométricas • Aplicaciones de la trigonometría • Resolución de triángulos: rectángulos • Teorema del seno y del coseno • Longitudes, áreas y volúmenes.

Tabla 7. Diseño de los contenidos de las actividad en función de los contenidos curriculares.

El diseño de las actividades responde a la secuenciación de los contenidos desde la geometría planta hasta la geometría del espacio, de lo estático a lo dinámico, desde los conceptos sencillos a los complejos.

Las actividades propuestas también comprenden los contenidos curriculares correspondientes a Resolución de problemas y las Actitudes, tal y como se indican en las tablas 1 y 2 del anexo I, para cada nivel educativo.

Dada la versatilidad de la propuesta, también podrían utilizarse los contenidos del bloque de álgebra: funciones, por ejemplo, definiendo las funciones que definen las rectas de las figuras geométricas. O también con el de estadística y probabilidad, calculando probabilidades de las piezas geométricas de determinado color, o la probabilidad de movimientos existentes en el diseño concreto del mosaico.

4.3.5. Estrategias de intervención

Las estrategias de intervención de la propuesta responden a la aplicación de las pautas metodológicas de la propuesta, dando como resultado actividades cooperativas de participación activa del alumnado, incluyendo en ellas recursos

atractivos de visualización y razonamiento espacial, que motivan al alumnado y le ayudan a la comprensión de los conceptos matemáticos.

Se indican a continuación las destrezas correspondientes a la capacidad espacial, que se pretenden favorecer y desarrollar en cada una de las actividades:

- Habilidad de identificación visual: Reconocer la figura independientemente de su contexto.
- Habilidad de las posiciones espaciales: Relacionar la posición de un objeto con uno mismo y con otros.
- Habilidad de percepción de relaciones espaciales: Identificar las características de relaciones entre objetos, establecer la relación de cada parte dentro del todo.
- Habilidad de memoria visual: Recordar las características visuales y de posición de objetos que están ocultos o han sido modificados.
- Habilidad de rotación mental: Producir imágenes mentales dinámicas y visualizar en la mente una configuración en movimiento.
- Habilidad de conservación de la percepción: Reconocer que las relaciones entre las figuras se mantiene al someterlas a giros y simetrías.
- Habilidad de discriminación visual: Comparar varios objetos, e identificar similitudes o diferencias entre ellos (forma, tamaño, color).

Se especifican en el diseño de cada actividad del anexo II., en el apartado correspondiente al de estrategias de intervención.

4.3.6. Metodología

Las metodologías utilizadas en el diseño de las actividades corresponden a las que se plantean en la propuesta y que se han definido en apartados anteriores, para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje constructivistas, basados en la participación activa de los estudiantes.

De esta forma, los contenidos a trabajar complementan a los trabajados en años anteriores, ya que las metodologías activas y significativas permiten establecer conexiones entre dichos conocimientos previos y los nuevos a adquirir.

Para el diseño específico de cada actividad, se ha escogido las metodologías de resolución de problemas y por descubrimiento, se han

fusionado ambas, generando actividades secuenciadas y guiadas, hasta llegar a su resolución. El planteamiento ha sido la generación de preguntas más concretas en la actividad 1, mientras que en la siguiente se han planteado preguntas más abiertas, tal y como se refleja en la página 24 del anexo II. ya que se supone han adquirido la estructura de guiado en la actividad anterior, y por tanto la podrán aplicar en esta nueva actividad. En la actividad 3, por el contrario, se vuelve a recuperar la secuenciación de preguntas guiadas, ya que los contenidos se complican a una dimensión tridimensional. De todas formas, podría igualmente plantearse con preguntas abiertas, es decir, favoreciendo más el descubrimiento por parte de los estudiantes, si el contexto de aula lo requiriera.

En cuanto a la metodología utilizada en la actividad 4, se ha escogido la de invención de problemas, que por las características de la misma se considera apropiada para aplicar en niveles superiores, con la estructura propia de dicha metodología, tal y como se define en la página 40 y siguientes del anexo II.

Actividad	Metodologías
1.	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje cooperativo • Resolución de problemas/ por descubrimiento.
2.	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje cooperativo • Resolución por descubrimiento.
3.	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje cooperativo • Resolución de problemas/ por descubrimiento.
4.	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje cooperativo • Invención de problemas.

Tabla 8. Metodologías planteadas en cada actividad.

Estas metodologías se especifican en el diseño de cada actividad del anexo II., en el apartado correspondiente al de metodología, y se definen propiamente en la secuenciación de las fases de desarrollo de cada actividad.

4.3.7. Actividades

En este apartado se presentan varios ejemplos de actividades acordes a los criterios de diseño establecidos en el método propuesto, para trabajar los contenidos concretos que fomentan el desarrollo de la capacidad de visión espacial del estudiante.

Se describe la organización general de cada actividad, secuenciadas y temporalizadas, y la manera en que se pueden abordar cada una en función del contexto, a partir de la visualización de una imagen, reforzada por la explicación de los conceptos nuevos sobre otros ejemplos, realizar sobre ella una actividad para validar los nuevos conceptos, en la que se incluya la puesta en común a lo largo, o al final de la actividad.

En el anexo II se define concretamente el material elaborado para cada actividad¹⁰, en el apartado 7 de cada una de ellas, y que se resumen aquí los puntos clave de la propuesta, comunes a todas ellas, concretando la información de las distintas fases en que consta cada actividad, definiendo el tipo de preguntas a realizar, e indicando las destrezas que entran en juego en cada una de ellas.

SECUENCIACIÓN DE LA ACTIVIDAD. FASES
1. Visualización - motivación
<p>Indagar las conexiones que realizan los estudiantes entre las matemáticas y la realidad (recursos atractivos: imagen, texto, video).</p> <ul style="list-style-type: none">• <u>Pregunta de indagación</u>: Puesta en común de lo “visto” – identificado – grupo clase• Búsqueda de información, por grupos. <p>=====</p> <ul style="list-style-type: none">• Habilidades – destrezas: percepción, visualización, observación, definición y reconocimiento.
2. Reconocimiento e identificación
<p>Identificar, reconocer, explorar relaciones - revisión de conocimientos previos: indagar lo que saben (se acuerdan).</p> <p>Docente: Planteamiento de preguntas iniciales sobre la imagen – diagnóstico de conocimientos previos. Cada estudiante verá lo que sabe, punto de partida (individual).</p> <ul style="list-style-type: none">• <u>Preguntas guiadas</u>: acordes a los contenidos, o genéricas, en función de la metodología a seguir. <p>Estudiante: Ficha individual. (puede servir para generar los grupos). Diseño ficha individual – rúbrica diagnóstico.</p>

¹⁰ Ver Anexo II. Fichas de la propuesta metodológica. Diseño de actividades.

- Síntesis de los conocimientos previos: Puesta en común de lo “visto” – identificado – grupo clase

* Se plantean aquí todas las preguntas juntas, para adaptarse al alumnado, algunos sabrán hasta un punto, y otros más...

* Algunas de las preguntas se podrán contestar con los conocimientos previos de años anteriores, sin embargo, cada grupo se adecuará a su nivel de conocimientos y resolución, y podrá completar los apartados después de la explicación teórica de los conceptos matemáticos.

- Habilidades – destrezas: percepción, visualización, observación, recuerdo, comprensión, entender la información geométrica, interpretar, comparar, contrastar, agrupar.

3. Aprendizaje y comprensión: exposición conceptos teóricos

Práctica, entrenamiento y ejercitación de las habilidades espaciales, identificando, analizando, y comprendiendo los conceptos geométricos en otros ejemplos visuales...

- Con variedad de recursos visuales atractivos gráficamente, para que no sea monotemático, atendiendo a los intereses de todos los estudiantes. (Se podrá dibujar en el ejemplo sencillo todos los conceptos nuevos, a medida que se van explicando). O también utilizar otras imágenes, aplicaciones, recursos atractivos para el contexto de la clase.

- Otras imágenes (intereses del alumnado)
- Videos de internet: demostraciones visuales
- Aplicación Geogebra

- Siguiendo el mismo esquema de las preguntas (de los sencillo a lo complejo)

- Fórmulas algebraicas asociadas a imágenes – figuras

- Habilidades – destrezas: percepción, visualización, observación, entender la información geométrica, interpretar, comparar, contrastar, agrupar.

4. Análisis y síntesis: aplicación y ejercitación

Se trabaja la comprensión de los contenidos nuevos sobre la imagen.

- Preguntas de orientación: se añaden más preguntas acerca de la imagen, para orientar y aplicar los nuevos conceptos (y los previos no recordados previamente), para comprenderlos, buscar y descubrir relaciones.

- Desarrollo de la actividad, trabajo en grupo, y posible vuelta a las preguntas iniciales de la fase 2, en caso de no haberlas completado.

* Se podrán completar los apartados del punto 2. de manera algebraica, una vez identificados (si no se acuerdan)

- Resolución de las preguntas – soluciones aportadas por cada grupo, a poner en común en una ficha de respuestas de la actividad (en grupo).

Diseño ficha grupal- rúbrica desarrollo actividad grupal

- Habilidades – destrezas: aplicar, seleccionar, calcular, demostrar, clasificar, analizar.

5. Comprobación

Comprobación de los conceptos teóricos en la imagen: generalización y validación.

<ul style="list-style-type: none"> • <u>Preguntas de validación</u> de los conceptos desarrollados, de comprobación. Se dará un paso más allá, para atender a la diversidad (alumnado con mayor interés, de altas capacidades) incluyendo preguntas de ampliación. <ol style="list-style-type: none"> a. Preguntas de comprobación b. Preguntas de ampliación
<ul style="list-style-type: none"> • Habilidades – destrezas: aplicar, comprobar, generalizar, demostrar.
6. Creación y síntesis
<p>Cuestiones para crear, integrar y combinar lo aprendido para resolver nuevas situaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>preguntas de creación</u> <ol style="list-style-type: none"> a. Preguntas de creación
<ul style="list-style-type: none"> • Habilidades – destrezas: sintetizar, crear, combinar, diseñar, integrar.
7. Valoración - evaluación
<p>Puesta en común del resultado, de las soluciones al problema.</p> <p>* Se da la posibilidad de aportar más ejemplos del entorno donde se utilicen los conceptos matemáticos vistos (se calificará para la evaluación como subida de nota).</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Habilidades – destrezas: exponer, valorar, comparar, juzgar, argumentar, sacar conclusiones.

Tabla 9. Secuenciación de las actividades. Fases.

La temporalización de cada actividad se ha realizado en varias sesiones, siguiendo la estructura de cada una de ellas: fase inicial, fase de desarrollo, fase de aplicación, consolidación y comunicación, que pueden ser flexibles y adaptables al ritmo del aula. Se definen en cada actividad en el anexo II.

4.3.8. Evaluación de las actividades

La evaluación de la aplicación práctica ha sido elaborada teniendo en cuenta los criterios de evaluación de la propuesta metodológica, especificada en cada una de las actividades en el apartado 8 del anexo II. Se concreta para todas ellas una evaluación mediante rúbricas¹¹, en la que se valoren las destrezas necesarias en la resolución de cada actividad. Y por lo tanto, tal y como se ha indicado anteriormente, se evalúa el proceso de cada estudiante, a lo largo de cada actividad, y en su conjunto, tanto de los conocimientos adquiridos,

¹¹ Ver Anexo II. Ficha de la propuesta metodológica. Diseño de las actividades.

habilidades espaciales desarrolladas, así como las competencias transversales puestas en práctica de manera cooperativa dentro del grupo.

Se incluye el diseño de varios tipos de rúbricas, en función de los parámetros a evaluar, y la metodología utilizada, acordes a las fases concretas de desarrollo, y que se definen al final del anejo II para cada actividad, para dejar constancia de la versatilidad y la necesidad de concreción de la propuesta metodológica. Se ha asignado un tipo de rúbrica a cada actividad, con la intención de indicar los distintos parámetros que pueden ser evaluados en ellas:

- Rúbrica de destrezas (espaciales y creativas): para evaluar si las han utilizado para la resolución de la actividad, si les han ayudado en la asimilación de los conceptos teóricos, (evaluación de la actividad 1).
- Rúbrica de trabajo cooperativo: para evaluar si la cooperación ha ayudado en la tarea, si han aprendido unos de otros, (evaluación de la actividad 3).
- Rúbrica de resolución de problemas, (evaluación de la actividad 2).
- Rúbrica de invención de problemas, (evaluación de la actividad 4).

En cada una de las actividades, la adquisición de los contenidos específicos supondrá un 60% de la nota final, y las competencias transversales supondrán un 40% del total.

A su vez, en este caso concreto, en el que se han planteado tres actividades para el bloque de geometría del curso anual, el peso en la calificación de cada actividad corresponderá a su vez un 40% (actividad grupal), que se completaría con otra actividad como prueba final 60% (individual).

4.3.9. Evaluación de la propuesta

Respecto a la evaluación de la propuesta, una vez llevada a cabo, se puede realizar la valoración de su eficacia en el aula,

Como punto de partida, se pueden plantear preguntas a los estudiantes para conocer si consideran ha sido eficaz la intervención, es decir, puedan valorar si la sistemática de utilización de imágenes y ejercitación de contenidos sobre ellas les ha favorecido en el desarrollo de las habilidades espaciales y en la asimilación de los conceptos matemáticos, como por ejemplo:

- ¿De las tipologías de actividades, cuál te ha gustado más?, ¿y por qué?

- ¿Consideras esta metodología activa y cooperativa eficaz para ejercitar tu capacidad espacial?
- ¿Consideras que los recursos visuales utilizados te han ayudado a ejercitar tu capacidad espacial y asimilar mejor los conceptos geométricos?
- ¿Qué recursos te han gustado más, las imágenes, las aplicaciones informáticas, las manipulativas?, ¿y por qué?

Teniendo en cuenta estas y otras posibles preguntas a realizar a los estudiantes, conjuntamente con la información y anotaciones recogidas a lo largo de todo el proceso de desarrollo de las actividades, el docente podrá evaluar la eficacia de la intervención. En realidad se pueden valorar cada uno de los apartados de la estructura de la propuesta metodológica, en función de la elección de los diferentes parámetros: si responde al contexto concreto, la adecuación de los contenidos, la eficacia de estrategias de intervención, la metodología, los recursos didácticos utilizados, si atiende de manera adecuada a la diversidad. A partir de los cuales, se podrán realizar adaptaciones y mejoras de la propuesta, para futuras intervenciones didácticas

4.3.10. Materiales y recursos

Recursos materiales y tecnológicos

- Ordenador (chromebook).
- Pizarra, proyector.
- Manipulativos: cartulina, escuadra y cartabón.
- Imágenes e información aportadas por el docente.
- Aplicación informática: Geogebra.
- Hojas de observaciones y rúbricas.
- Material de apoyo para alumnado con necesidades especiales:
 - o Material de ayuda, ejemplos guiados (para refuerzo, TDAH, alumnado recién llegado), y elementos de ampliación (para altas capacidades).

Recursos docentes

- Planteamiento de las sesiones y la actividad, pautas:
 - o Explicaciones dinámicas y motivadoras, observación, escucha activa.
 - o Proponer situaciones cotidianas, matematización del entorno.
 - o Fomentar la creatividad en la resolución.

- Potenciar su autonomía personal.
- Técnicas basadas en la conducta: aplicación de refuerzos positivos:
 - Elogiar comportamientos adecuados y concretos.
 - Reforzar la autoestima, la confianza, etc.

4.3.11. Atención a la diversidad

La atención a los distintos ritmos de aprendizaje se permite mediante el trabajo cooperativo en los grupos, utilizando a su vez una mezcla de metodologías, de resolución de problemas mediante preguntas guiadas, y por descubrimiento, pretendiendo que realicen una búsqueda de la representación de los conceptos en la imagen.

Las actividades se han diseñado respondiendo al contexto concreto del aula, incluyendo por un lado materiales de apoyo para el alumnado con necesidades especiales, como incluyendo preguntas de ampliación para aquellos que quieran ir más allá de la aplicación y comprobación de los contenidos teóricos en la imagen, pueden ser alumnos con mayor interés, de altas capacidades.

Así como en la fase de creación, donde se da opción a los estudiantes a que disfruten más intensamente las matemáticas.

4.3.12. Interdisciplinariedad

La aplicación práctica de la propuesta didáctica en las cuatro actividades diseñadas, se puede compartir con otros ámbitos curriculares, tales como las Historia de arte, Tecnología, o Dibujo técnico. De esta forma, la actividad 1 se puede adaptar incluyendo contenidos de historia del arte, tecnología, o tecnologías de la información (TIC); la actividad 2 con geografía, interpretación de mapas, la 3 con física y química, ya que se puede estudiar el elemento que compone las cubiertas, el zinc, y realizar ejercicios de aleaciones, calculando diferentes conceptos, como la molaridad, la densidad, etc.

Incluso las actividades 3 y 4, podrían adaptarse ampliándolas a 1º bachillerato, como repaso de los conocimientos previos de la etapa de secundaria, y trabajarlas conjuntamente en la asignatura de dibujo técnico. En ella se podría estudiar el cuerpo geométrico que compone las cubiertas de zinc, o las posibles figuras tridimensionales que podrían surgir de la representación en planta de la plaza, para analizar su vistas de representación, las secciones por planos, abatimientos sobre planos oblicuos, y demás conceptos del sistema de dibujo diédrico.

5. DISCUSIÓN

Según la revisión de las investigaciones recientes, en el desarrollo de la capacidad espacial se establece la conexión entre los conceptos geométricos y las habilidades espaciales, especialmente la visualización, y cómo dicha conexión permite la elaboración de razonamientos bien estructurados (Clements y Battista, 1992).

Además queda suficientemente argumentado que la capacidad espacial y la geometría tienen una implicación directa en la vida diaria y la formación y el desarrollo personal de los estudiantes, tanto a nivel social como personal. Por lo que se considera necesaria poner especial atención en el entrenamiento y fortalecimiento de las habilidades espaciales, incluso en otras materias además de las matemáticas, de manera interdisciplinar.

Se coincide con las investigaciones realizadas, en que la geometría ayuda a interpretar y actuar sobre el espacio, favorece la interacción del medio con el alumnado, y da lugar a un aprendizaje significativo. Por lo que los contenidos geométricos pueden ser explicados mediante la visualización de imágenes del entorno próximo a los estudiantes, para provocar esa asimilación de conocimientos. Éstas, a su vez, demuestran cómo los procesos de visualización, como soporte de la actividad cognitiva, permiten el aprendizaje de la geometría, y es por ello que resulta esencial la forma de representar los conceptos matemáticos, para la asimilación e interiorización de los mismos.

Las teorías innovadoras de la educación matemática consideran que el contexto debe ser realista y de la vida cotidiana, para que tenga una significación, un sentido y pueda posibilitar la asimilación de los conceptos y reinención de las matemáticas. De ahí, que, el uso de la *Imagen* como ilustradora de un contenido concreto, facilite la comprensión de los conceptos geométricos de forma práctica, para que los estudiantes puedan afrontar los problemas que se les plantearán en su vida cotidiana.

Por tanto resulta imprescindible, que en la enseñanza y aprendizaje de la geometría se diseñen actividades en las que intervengan imágenes reales donde se reflejen las figuras geométricas y sus propiedades, como base significativa, para analizar y reflexionar en ellas sobre los contenidos de la geometría, incluso dando un paso más allá, planteándolas de manera

interdisciplinar con otros ámbitos, como el social, el arte, la geografía, la física, la tecnología, el dibujo, etc.

Con el apoyo de los estudios de Arnheim (1985), el trabajo pretende establecer acciones formativas a partir de la percepción visual y el desarrollo de habilidades y procesos visuales, que, conjuntamente con la reorganización de la información adquirida en la mente, permitan la asimilación de los conceptos abstractos matemáticos y puedan a su vez comprobarlos en el entorno.

Las consideraciones expuestas en el marco teórico llevan a elaborar una propuesta didáctica de la geometría de situaciones reales, a partir de las cuales se derive un razonamiento deductivo y las matemáticas y generalice, para poder resolver nuevas situaciones (Arrieta, 1992). Se proponen las estrategias acordes al trabajo y desarrollo de los factores que favorecen la capacidad espacial, como son la percepción y la visualización, para llegar al aprendizaje significativo de los contenidos geométricos, que se componen de unas pautas de guía, de ejes de acción, de forma sistematizada, para diseñar intervenciones de aula con la realización de actividades, ejercitando la visión espacial, mediante fases de resolución previamente establecidas.

Las habilidades espaciales se desarrollan y amplían con la práctica, por lo que la propuesta didáctica plantea incluir en el diseño de las actividades, la utilización de imágenes y recursos visuales motivadores para trabajar dichas habilidades, de tal forma que faciliten el aprendizaje de los conceptos geométricos. Y añade en su secuenciación, las habilidades espaciales a desarrollar, además de las propuestas por Bloom (1956), lo que nos permitirá establecer el nivel de desarrollo de los estudiantes, en función de los objetivos de aprendizaje establecidos para cada intervención de aula.

Se plantea la utilización de imágenes en cada fase de secuenciación de desarrollo de las actividades, que atiende a su vez a la evolución del razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele (1957), con estrategias de motivación, a partir de la visualización de los conceptos matemáticos en imágenes estimulantes, incluyendo además puestas en común para compartir las ideas matemáticas, favoreciendo así el nivel de razonamiento geométrico y el aprendizaje y mejora de las competencias lingüísticas de los estudiantes.

Además, si, tal y como apunta Piaget, la inteligencia es la solución de un problema nuevo, la creatividad puede integrarse dentro de los procesos cognitivos que en ella se implican, junto a la memoria visual, el razonamiento espacial, la capacidad de abstracción y la orientación espacial.

Según se ha indicado anteriormente, la creatividad forma parte de la educación matemática, y se puede favorecer su desarrollo mediante el razonamiento matemático, ya que requiere discernir opciones y hacer conjeturas de resolución de situaciones. Y por lo tanto es necesario incluirla en el sistema educativo actual, que hoy en día no se fomenta, incluso la obstaculiza, tal y como consideran Barbarán y Huguet (2013, citados en Ayllón, Gómez, Ballesta-Claver, 2016).

Por todo esto, se ha pretendido fomentar la creatividad dentro de la propuesta, con la inclusión de actividades de ampliación, buscando construir y diseñar algo nuevo, a partir de los conocimientos matemáticos, estudiando las distintas posibilidades, buscando soluciones originales y novedosas (Bolden, Harries y Newton, 2010).

La utilización de imágenes y recursos visuales reales, y la búsqueda de información geométrica en ellas mediante metodologías activas, se considera apropiada, en la línea de lo que Barrantes y Zapata (2008) indican, para corregir los esquemas conceptuales incompletos o mal contruidos sobre los conceptos, propiedades de las figuras geométricas que puedan tener los estudiantes heredadas de la etapa de primaria. Me refiero a las imágenes de prototipos fijos y establecidos en los diseños de los libros de texto tradicionales, en los que aparecen estilos generalizados sobre las figuras y conceptos geométricos, que no prestan atención a la simbología del lenguaje visual, que dan lugar a interpretaciones diversas.

Además hay evidencias de que el aprendizaje cooperativo es una dinámica que atiende a la diversidad del aula, permitiendo el trabajo conjunto y creando sinergias entre los ritmos de aprendizaje de los estudiantes, y que debe siempre estar apoyado por el docente, con la observación continua y el guiado personalizado en la resolución de las actividades.

La propuesta metodológica permite el diseño de intervenciones de aula mediante metodologías activas de aprendizaje cooperativo, por lo que el proceso de enseñanza- aprendizaje no se constituye únicamente con la

transmisión de contenidos curriculares por parte del docente (Thurstone, 1960), y de tal forma se consigue que el conocimiento adquirido por ellos mismos sea más relevante (Vygotsky, 1985).

Es por ello que las metodologías propuestas, tanto de resolución de problemas, por descubrimiento, e invención de problemas, se engloban dentro de las metodologías constructivistas que permiten desarrollar el razonamiento matemático y creativo y por tanto se consideran apropiadas para aplicar en el diseño de las acciones formativas que permite la propuesta metodológica.

Las características de la propuesta didáctica hacen que se presente como un modelo versátil, flexible y adaptable, permite diseñar intervenciones de aula adaptables al contexto concreto, curso y contenidos, a la diversidad, permite a su vez modificaciones y mejoras, y puede ser diseñado y configurado para contener más o menos información, acompañando preguntas a las imágenes, que facilitan la asimilación de los contenidos de una forma más amena y visual.

En la medida que las actividades pretendan responder al contexto concreto del aula, incluirán en su diseño material de refuerzo y de ampliación para el alumnado de necesidades especiales, en todas sus fases, y especialmente en la fase de creación, donde se da la oportunidad de desarrollar la creatividad matemática, favoreciendo así en el alumnado el pensamiento lateral y el espíritu creativo para que puedan responder al cambio.

La propuesta incluye a su vez, la posible generalización a otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, dentro de la temática de números, elementos visuales de los números; en álgebra, con el estudio de las ecuaciones que corresponden a las rectas y curvas representadas en las imágenes, etc. Igualmente, podría diseñarse y ampliarse, de manera interdisciplinar, respondiendo con ella a los contenidos curriculares de varias materias, con el fin de establecer líneas de trabajo comunes y diseñar estrategias interesantes y motivadoras para la comprensión, interpretación y resolución de problemas.

De manera específica, la atención a las habilidades espaciales y creativas y su conexión con los contenidos matemáticos, requiere especial dedicación por parte de los docentes, en la búsqueda de recursos atractivos y motivadores, para que a partir de la realidad de las imágenes del entorno, se permita la reflexión, el desarrollo del espíritu crítico y la creatividad.

Por tanto, el desarrollo de cada actividad requiere un diseño específico y concienciado por parte del docente, acorde a los contenidos matemáticos a trabajar, buscando realidades que respondan a ellos, imágenes en las que se puedan identificar y trabajar los mismos, reconociendo a su vez las habilidades y destrezas que manifiestan los estudiantes en el desarrollo y resolución de cada actividad. Requiere, sin duda, una labor importante de búsqueda de eficaces recursos significativos y creativos, lo más contextualizados posibles, para asegurar la motivación y el interés del alumnado.

Por último, y dado que la visualización de la geometría puede hacerse en distintos ámbitos (arte, arquitectura, diseño, etc.), la propuesta incluye un listado de recursos visuales de distintas disciplinas artísticas, que pueden ser utilizados para el diseño de las actividades, y que, combinados con las metodologías activas y de aprendizaje cooperativo, pueden dar respuesta a la diversidad del aula y fomentar un aprendizaje profundo de manera significativa.

Con este trabajo se ha pretendido atender a todos estos aspectos, configurando una propuesta metodológica basada en un modelo de estructuración y diseño de actividades que respondan a los contenidos del currículo, y que sirva de base a otros docentes para el diseño de las intervenciones didácticas, que garanticen una formación integral del alumnado.

6. CONCLUSIONES

Siempre me ha llamado la atención las formas, volúmenes, y el diseño del entorno, y que considero ha sido una parte que evidencia mi interés y afinidad por el aspecto creativo de cualquier concepto. No obstante cabe mencionar, que la capacidad creativa no tiene por qué estar reñida con un procedimiento ordenado y estructurado. Todo esto me ha llevado hasta la arquitectura, disciplina en la que convergen los aspectos más ordenados y estructurados, con una finalidad no sólo útil, sino además creativa.

En mi experiencia profesional, en la interacción con otros profesionales, tanto de la construcción, clientes, así como en mi día a día con las personas del entorno, se ha ido desarrollando mi inquietud didáctica a la hora de hacerles ver y facilitarles el entendimiento de conceptos que dado mi bagaje, tengo más asimilados. Y como consecuencia, me ha llevado a valorar la posibilidad de la docencia y por lo tanto, a estudiar este máster.

¿Y por qué matemáticas? Porque tiene relación con mi profesión actual, y porque las matemáticas explican mi forma de comprender la vida.

Es por esto que, teniendo en todo momento mi visión de cómo debería ser la enseñanza, todos los conocimientos adquiridos en el máster cursado, así como la enriquecedora experiencia de las clases prácticas realizadas junto al gran trabajo que ha supuesto tener que organizarlas de manera telemática, no han hecho más que reforzar mi convicción de poder aunar las metodologías didácticas tradicionales con estrategias más creativas.

Basándome en esta convicción, de que la creatividad, la capacidad espacial a través de la visualización de la realidad cotidiana, el aprendizaje cooperativo y la participación activa, favorecen nuevas formas de comprensión matemática, y pueden aportar a la enseñanza tradicional un mayor atractivo y una más fácil comprensión de los conceptos matemáticos, considero que la propuesta didáctica objeto del trabajo responde a los objetivos establecidos.

Dada la responsabilidad que tenemos como docentes en que el alumnado adquiera conocimientos y pueda utilizarlos en su día a día, resulta necesario estar formados constantemente, en la búsqueda de estrategias y recursos atractivos y eficientes probados, que mejoren el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y garanticen su buen rendimiento en el aula.

En definitiva, considero que son muchas las ventajas que aporta la visualización de imágenes de distintos ámbitos para el conocimiento matemático, ya que aporta beneficios adicionales para la formación de la identidad de los estudiantes, garantizando así el fin de la educación.

Espero por tanto, que este trabajo pueda servir como herramienta facilitadora y motivadora para otros docentes, como un recurso atractivo para acercar a los estudiantes los conceptos abstractos de las matemáticas.

7. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M. y Caramago, L., (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*. 32, 4-8.
- Alonso, M. y Matilla, L. (1990). *Imágenes en acción. Análisis y práctica de la expresión audiovisual en la escuela activa*. Madrid: Akal.
- Alsina, C. (2007). Las musas matemáticas: hacia una enseñanza creativa. Universidad Politécnica de Catalunya. *Sigma*, 30.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid. Síntesis.
- Altagracia, Y., Rincón, E., (2017). Niveles de logro y criterios para evaluar la comprensión de los objetos de la geometría. *Transformación*, 303-313.
- Álvarez, S. (2007). Procesos de visualización espacial y aprendizaje. *Revista de Investigación en Educación*, 4, 61-71.
- Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno N°12 Geometría: conceptos y construcciones elementales*. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Area-Moreira, M. (2005). Los criterios de calidad en el diseño y desarrollo de materiales didácticos para la WWW. Comunicación y pedagogía: Nuevas tecnologías y recursos didácticos, ISSN 1136-7733, N° 204, 2005, págs. 66-72
- Arnheim, R. (1990). *El pensamiento visual*. Barcelona: Paidós.
- Arnheim, R. (1999). *Arte y percepción visual*. Madrid: Alianza.
- Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15(3), 57-76.
- Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación Matemática*, 18(1), 99-132.
- Arteaga, E. (2002). Calidad y creatividad en Educación Matemática. Blog. Ensayo. *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, 2.
- Ayllón, M.; Gómez, I. y Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, 4(1), 169-218.
- Barakat, M. K. (1951). A study of mathematical abilities. *British Journal of psychology : statics section*, 4, 137-156.

- Barón, S. (2015). Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica. *Unión, revista iberoamericana de educación matemática*, 43, 49-69.
- Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo abierto*, 24, 15-36.
- Barrantes, M., Zapata, M.A., (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto*, 27(1).
- Barretbo, F., Barrantes, M. y Fernández, M.A. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina.
- Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 843-908. Charlotte, NC:Information Age Publishing.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R. (1988). The effect on instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25(1), 51-71.
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1994). La enseñanza de la geometría en la escuela primaria. Laboratorio de Didáctica de las Ciencias y Técnicas. Universidad Bordeaux I-IUFM de Aquitania. Francia. Traducido y reproducido en PTFD Selección bibliográfica III.
- Bishop (1989). *Matemática y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona, España: Graó.
- Bishop, A. J. (1998). El papel de los juegos en la educación matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9-19.
- Bloom, B.S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of Educational Objectives. Handbook I: Cognitive Domain by a Committee of College and University Examiners*. New York: David McKay; traducción: *Taxonomía de las Metas Educativas, por una comisión de Examinadores de Enseñanza Técnica y Universitaria*. Tomo I: *Ámbito del Conocimiento*. Alcoy, España: Marfil.
- Bodner, G.M, y Guay, R,B, (1997). The purdue visualization of rotations test. *The Chemical Educator*, 2(4), 1-17. Doi: 10.1007/s0089797038a.
- Bolden, D.S; Harries, A.V. y Newton, D.P. (2010). Pre- service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational studies in mathematics*, 73 (2), 143-157.

- Braga, G. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. *Signos Teoría y Práctica de la Educación*, 4, 52-57.
- Cagné R. M. (1987). Las Condiciones del Aprendizaje. Editorial Interamericana. 4^o Edición.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 8, 9-28.
- Carroll, J. B. (1993). Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies. New York: Cambridge University Press.
- Castellanos, R., Español, L., y Magreñán, A. (2019) Complementos para la formación disciplinar. *Matemáticas*. Logroño.
- Castellanos, R., y Ribera, J.M., *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa. Matemáticas*. Logroño.
- Crespo. F., Galavís, S., González, M.Z., Rojas, N., Salomón I. y Villapol, N. (2006). Estrategias instruccionales para estimular el desarrollo de la capacidad de percepción espacial. *Perfiles*. 41-53.
- Clements, D.H. y Battista M.T. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*, en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, NCTM: MacMillan Pub. Company, 420-464.
- Connor, J. M. y Serbin, L.A., (1985). Visual-Spatial Skill: Is it Important for Mathematics? Can it be Taught?”, en S. F. Chipman, L. R. Brush y D. M. Wilson (eds.), *Women and Mathematics*, Hillsdale, N. J., Lawrence Erlbaum, 151-174.
- Chadwick, C. (1998). La psicología del aprendizaje del enfoque constructivista. USA.
- Damasio, A. (2010). Y el cerebro creó al hombre. Barcelona, España: Destino.
- De la Torre, E., (1998). Estrategias de enseñanza de la Geometría en Primaria y Secundaria. En M. Barrantes 8ed.) *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 23-38.
- De la Torre, E., (2003). El método socrático y el Modelo de Van Hiele. *Lecturas matemáticas*, 24, 99-121. Recuperado de <http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf>.

- Del Pradro, D., (2010). Matemática creativa. 10 axiomas para aprender matemáticas con imaginación, disfrutándolas. Instituto Avanzado de Creatividad Aplicada Total. Santiago de Compostela.
- Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid, España: Unesco.
- Domingo, J. (2010). El aprendizaje cooperativo y las competencias. *RIDU. Revista d'Innovació Docent Universitària*, 2, 1-9 (DOI: 10.1344/105.000001520).
- Educación, Política Lingüística y Cultura, (BOPV, 15-01-2016), *Decreto 236/2015, de 22 de diciembre, por el que se establece el currículo de Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco*. Recuperado de <https://www.euskadi.eus/decretos-curriculares-de-la-capv/web01-a3hbhezi/es/>
- Educación, Política Lingüística y Cultura, (BOPV, 23-09-2016), *Decreto 127/2016, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo del Bachillerato y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco*. Recuperado de <https://www.euskadi.eus/decretos-curriculares-de-la-capv/web01-a3hbhezi/es/>
- Feinstein SG. (2009). *Secrets of the Teenage Brain*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Fernández, T., Díaz, J. y Cajaraville, J.A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema, Rio Claro*, 26, 42, 39-63.
- Fernández, T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. IX Festival Internacional de Matemática. Costa Rica.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Flores, P., Ramírez, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación primaria*, 127-146. Madrid, España: Pirámide.
- Friedman, L. (1995), The space factor in mathematics: gender differences. *Review of Educational Research*, 65, 1, 22-50.
- Fonseca, E. (2018). *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad*. Logroño.
- Gascón, J. (2002a). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En: *Disertaciones del Seminario*

- de Matemáticas Fundamentales N°28*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Gascón, J. (2002b). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?. *Suma*, 39, 13-25.
- Gatica, S.N. y Ares, O.E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Mediántica y TIC*, 88-107.
- Gaulin, C.; Puchalska, E. (1987): Coded graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry, en I. Wirzup; R. Streir (ed.), *Developments in school mathematics education around the world. Applications- oriented curricula and technology- supported learning for all students* (N.C.T.M.: Reston, VA, USA), 514-539.
- Gavilán, y Ovejero, (2019). El aprendizaje cooperativo en educación infantil. Recuperado en <https://www.campuseducacion.com/blog/revista-digital-docente/el-aprendizaje-cooperativo-en-educacion-infantil/>
- Guilford, J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.
- Goldberg E. (2002). El cerebro ejecutivo. Barcelona, España: Crítica.
- Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría. *Revista de Ciencias de la Educación*, 27, 84-98. Universidad de Carabobo, Venezuela.
- Gonzato, M. Fernández, T. y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica, 77, 99-117.
- Gorgorió, N.; Artigues, F. I.; Banyuls, F.; Moyanos, D.; Planas, N.; Roca, M. y Xifré, A. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, y las rotaciones. *Suma*, 33, 59-71.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in mathematics*. 35, 207-231.
- Gutiérrez, A. (2006). *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría*. En P. Flores, F. Ruíz y M. de la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI*, p.p. 13-58. Badajoz, España: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S.

- y Sánchez, M.V. (eds). El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Granada: Ed. Comares, 145-169.
- Gutiérrez, A. (1998), *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*. Barcelona, España: TIEM.
- Ibáñez, M. (2001). Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento. *Suma*, 37, 95-98.
- Jefatura del Estado. (BOE, 10-12-2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*. Recuperado de <https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf>
- Jensen, E. (2004). *Cerebro y aprendizaje. Competencias e implicaciones educativas*. Madrid, España: Narcea S.A.
- Jiménez, C., Magreñán, A., y Rotger, L. (2018-19) *Aprendizaje de las matemáticas*. Logroño.
- Kolvoord, R. (2012). Integrating Geospatial Technologies and Secondary Student Project: the Geospatial Semester. *Didáctica Geográfica*, 13, 57-67.
- Kosslyn, S.M. (1990). Resolving the imaginery debate: A cognitive neuroscience perspective, en *Third European Workshop on Imagery and Cognition*, p.p. 15-18. University of Aberdeen. Scotland.
- Lean, G. y Clements, M.A., (1981). Spatial ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267-299.
- Lekue, P. (2008). Habilidades espaciales en la interpretación de mensajes visuales. Ikastorratza, e- *Revista de Didáctica*, 2. Recuperado de http://www.ehu.es/ikastorratza/2_alea/habilidades.pdf
- Linn, M.C., & Petersen, A.C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta. Analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.
- Lledó, E., (2008), *Guía de lenguaje para el ámbito educativo*. Vitoria-Gasteiz. EMAKUNDE/Instituto Vasco de la Mujer.
- López, V., Marchena, P. (2017). Un estudio exploratorio de la relación entre la inteligencia musical, viso-espacial, corporal-cinestésica y creatividad motriz

- en el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Enseñanza & Teaching*, 35(2), 55-75.
- Luengo, M.A. (1989). Taxonomía Aplicada a las Matemáticas. *Aula Abierta*, 54, 57-63.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*. 30, 2, 236–260.
- Marina, J.A. (2012). Neurociencia y Educación. Universidad de padres.
- Marina, J.A., (2011). La Educación del Cerebro. Artículo de prensa.
- McGee, M. C. (1979), "Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences", *Psychological Bulletin*, 86, 899-918.
- Michael, W., W. S. Zimmerman y J. P. Guilford (1951), "An investigation of the nature of the spatial-relations and visualization factors in two high school samples", *Educational and Psychological Measurement*, 11, 561-577.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1985). Informe Cockcroft. Las matemáticas sí cuentan. Informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas bajo la presidencia del Dr. W.H. Cockcroft. Madrid.
- Moles, A. (1991). Pensar en línea o pensar en superficie. En *Enciclopedia del diseño. Imagen didáctica*. Barcelona, España: CEAC.
- Moreira da Costa, E. (2010) Enseñar y aprender matemáticas con origami. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 53, 25-37.
- Murray, J. E., (1949). Analysis of Geometric Ability. *Journal of Educational Psychology*, 40, 118-124.
- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- OECD (2005). The definition and selection of key competencies. Executive summary. París, Francia: OECD Publishing.

- Pérez-Rubín, C., (2001). La creatividad y la inspiración intuitiva. Génesis y evolución de la investigación científica de los hemisferios cerebrales. *Arte, Individuo y Sociedad*, 13, 107-122.
- Perrenoud, Ph. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar: invitación al viaje*. Barcelona, España: Graó.
- Piaget, J., (1969). Psicología y Pedagogía. Recuperado de <http://dspace.universia.net/bitstream/2024/1249/1/PiagetJeanPsicologiayPedagogia.pdf>
- Pintrich, P. y De Groot, E. V. (1990). Motivated and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology*, 82(1), 33-40.
- Ruíz, C. Neurociencia y Educación. Recuperado en http://www.webdocente.altascapacidades.es/Articulos/PDF/Art6/1_neurociencia_y_educacion.pdf
- Prada, M.D. (2003). Marco metodológico para la atención a la diversidad: una experiencia en el área de matemáticas. *Revista de educación*, 330, 419-447.
- Prokysek, M. y Štípek, J. (2016). Spatial Intelligence of University Students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 217.
- Pujolàs Maset, P. (2008). 9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo. *Colección Ideas Clave. Director de La Colección: Antonio Zabala. Serie: Orientación y Tutoría*.
- Pujolàs, P. (2008). El aprendizaje cooperativo como recurso y como contenido. *Aula de innovación educativa*, 170, 37-41.
- Pujolàs Maset, P. (2012). Aulas inclusivas y aprendizaje cooperativo. *Educatio Siglo XXI: Revista de La Facultad de Educación*.
- Ramirez, R., (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Tesis Doctoral. Granada.
- Rapetti, M.V. y Difabio de Anglat, H. (2003). Cualidades psicométricas de una prueba de competencia imaginativa. *Educación Matemática*, 15(3), 91-108.
- Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Suma*, 46, 71-77.

- Rojas, C.J., (2013). La instrucción geométrica y la representación plana de módulos multicubos en un grupo de alumnos: un diseño preexperimental. *Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte*, 19.
- Roselli, M. (2015). Desarrollo Neuropsicológico de las Habilidades Visoespaciales y Visoconstruccionales. *Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias*. Vo. 15, nº1, p.p. 175-200.
- Shepard, R. N. y Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, 171, 701-703.
- Shepard, R. N. y Cooper, L. A. (1986). *Mental images and their transformations*. Cambridge, MA: Mit Press.
- Sorando, J.M., (2010). El humor geométrico de Jacques Tati. *Revista Suma*. 63, 119-123.
- Spears L. (2010). *The behavioral neuroscience of adolescence*. Nueva York: Norton.
- Suarez, W.A., León, O.L. (2016). La visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 18(2), 110-119.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- Thibaut, E., (2004). Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional. *Suma*, 47, 11-18.
- Thurstone, L. (1960). *The Nature of Intelligence*. Londres: Littlefield, Adams.
- Van Hiele, P.M., (1986). *Structure and Insight : A theory of mathematics education*. Universidad de Michigan: Academic Press.
- Vargas, G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Vázquez, S. M. y Noriega Biggio, M. (2010). La competencia espacial. Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación Matemática*, 22(2), 65-91.
- Vázquez, S. M. y Noriega Biggio, M. (2011). Razonamiento espacial y rendimiento académico. Interdisciplinaria *Revista de Psicología y Ciencias afines*, 28(1), 145-158. Recuperado de

http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166870272011000100009&lng=pt&nrm=iso

- Vázquez, S., Noriega, M. y García, S. (2013). Relaciones entre rendimiento académico, competencia espacial, estilos de aprendizaje y deserción. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 15(1), 29-44. Recuperado de <http://redie.uabc.mx/vol15no1/contenido-vazqueznoriega.html>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En Tall, D (ed) *Advanced mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 65-81.
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1993). On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, 1(83), 20-25.
- Vygotsky, L. (1985). *Pensée et langage*. Paris: Editions Sociales.

8. ANEXOS

8.1. Anexo I. Componentes del diseño curricular.

8.2. Anexo II. Ficha de la propuesta metodológica. Diseño de actividades.

8.3. Anexo III. Recursos didácticos.